Jimmy ROUSSEL - ENSCR

ÉLECTROMAGNÉTISME

Cours

Accessible en ligne : http://femto-physique.fr/electromagnetisme/

Dernière mise à jour : 1er février 2017

Table des matières

I ÉLECTROMAGNÉTISME EN RÉGIME STATIQUE **2**

1 INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE **3**
1.1 Loi de Coulomb 4
1.2 Le champ électrique 8

2 POTENTIEL ET ÉNERGIE ÉLECTRIQUES **14**
2.1 Potentiel électrostatique 15
2.2 L'énergie électrostatique 18

3 LE DIPÔLE ÉLECTRIQUE **21**
3.1 L'approximation dipolaire 22
3.2 Interactions dipolaires 27

4 CONDUCTEURS ÉLECTRIQUES **31**
4.1 Conduction électrique 32
4.2 Conducteurs en équilibre électrostatique 35
4.3 Notion de capacité 39

5 INTERACTIONS MAGNÉTIQUES **44**
5.1 Les aimants 45
5.2 Force de Lorentz 46
5.3 Interaction magnétique avec les courants électriques 51

6 CHAMP B CRÉÉ PAR DES COURANTS ÉLECTRIQUES **58**
6.1 Le courant électrique comme source de champ magnétique 59
6.2 Champ créé par un dipôle magnétique 65

II ÉLECTROCINÉTIQUE **69**

7 ÉTUDE DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES **70**
7.1 Lois de l'électrocinétique 71
7.2 Phénomènes résistifs 74
7.3 Modélisation linéaire d'un dipôle actif 77
7.4 Phénomènes capacitifs 82
7.5 Phénomène d'auto-induction 85

8 RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ **90**
8.1 Signaux périodiques 91
8.2 Notion d'impédance et d'admittance 95
8.3 Puissance en régime sinusoïdal forcé. 98

Première partie

ÉLECTROMAGNÉTISME EN RÉGIME STATIQUE

1 – INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE

L'électromagnétisme consiste en l'étude des phénomènes qui font intervenir des charges en mouvement (courants électriques, antenne radio, conductimétrie, courants de Foucault,...). On se restreint, pour l'instant, aux phénomènes indépendants du temps ce qui permet de séparer l'étude des effets magnétiques et électriques. Ce cours aborde l'électrostatique, c'est-à-dire l'étude du champ électrique produit par des charges immobiles.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

http://femto-physique.fr/electromagnetisme/interaction_electrostatique.php

Sommaire

1.1 Loi de Coulomb 4
1.1.1 Quelques faits expérimentaux 4
1.1.2 Notion de charge électrique 5
1.1.3 Loi de Coulomb 6
1.2 Le champ électrique 8
1.2.1 Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles . . 8
1.2.2 Topographie - Symétrie 9
1.2.3 Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges . . 12

1.1 Loi de Coulomb

1.1.1 Quelques faits expérimentaux

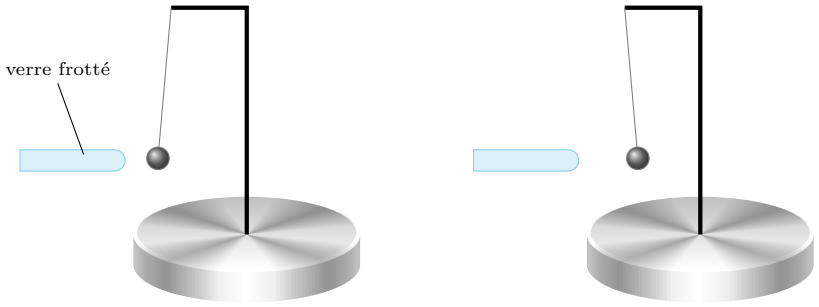
Les premières observations

Il y a plus de 2600 ans, les savants grecs avaient déjà constaté que l'ambre jaune (une résine naturelle) frottée énergiquement avec une fourrure avait la faculté d'attirer les corps légers tels que les cheveux ou fetus de paille. C'est d'ailleurs le mot grec $\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho o\nu$ (*êlektron*), signifiant ambre, qui est à l'origine du terme « électricité » [1]. Cette électrisation par frottement, dite *triboélectricité*, s'observe facilement dans la vie quotidienne. Parfois une forte électrisation peut même produire des étincelles comme lorsqu'on enlève un pull de laine rapidement (à condition d'être dans une pièce sombre pour percevoir ces étincelles). L'éclair, lors d'un orage, est un phénomène d'électricité statique impressionnant qui fut longtemps craint par les hommes. Il fallut attendre B. Franklin en 1752 pour identifier la nature électrique du phénomène et pour maîtriser les dégâts du tonnerre par l'invention du paratonnerre.

Les deux formes de l'électricité

C'est Charles du Fay qui observa les deux formes d'électricité. On peut mettre en évidence ces deux formes par les expériences suivantes.

Expérience 1 Un pendule électrostatique est constitué d'une bille de polystyrène recouverte d'une feuille d'aluminium suspendue à une potence par un fil. Lorsqu'on approche une baguette électrisée du pendule, la bille est attirée par la baguette. Après contact avec la baguette, elle est repoussée.



Avant le contact Après le contact

Expérience 2 Si on électrise un pendule électrostatique par contact avec une baguette chargée, et que l'on approche successivement d'autres baguettes électrisées, on s'aperçoit que la boule du pendule est soit attirée, soit repoussée par les diverses baguettes. On peut donc en déduire qu'il existe deux types de forces électriques.

Électrisation par influence

Expérience 3 Un électroscope est constitué d'une tige métallique à laquelle on fixe une aiguille métallique pouvant librement tourner autour d'un axe. On fixe parfois deux feuilles très fines en or ou en aluminium. L'ensemble est placé dans une enceinte transparente et isolante (verre). Lorsqu'on approche une baguette électrisée de l'électroscope (sans le toucher), l'aiguille

1. Terme introduit en 1600 par William Gilbert dans son ouvrage *De Magnete*.

s'écarte de la verticale. Si on éloigne la baguette, l'aiguille retrouve sa position verticale de repos. Il y a électrisation de la tige et de l'aiguille sans contact, seulement par influence.

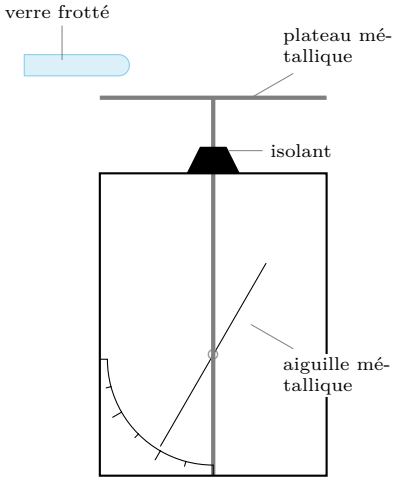
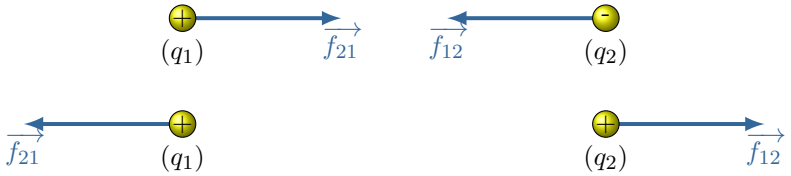


FIGURE 1.1 – Plus la baguette se rapproche de l'électroscope, plus les aiguilles s'écartent.

1.1.2 Notion de charge électrique

Jusqu'au XVIII^{e} siècle, l'électricité est une science essentiellement qualitative et il faut attendre le début du XIX^{e} siècle pour qu'une théorie mathématique de l'électricité émerge : c'est l'électrostatique. La notion de charge électrique algébrique s'est imposée au fil du temps car elle permettait de décrire correctement les phénomènes. De nos jours, on admet les hypothèses suivantes.

1. La matière est constituée de particules que l'on peut caractériser par une propriété scalaire, noté q et désignant la **charge électrique**. Cette charge est positive, négative ou nulle (on parle de particule neutre dans ce cas).
2. Deux particules possédant une électricité de même nature, c'est-à-dire une charge de même signe, se repoussent ; elles s'attirent dans le cas contraire.



3. La charge étant caractéristique de la matière, elle ne dépend pas du référentiel.
4. Par ailleurs, la charge électrique d'un système isolé se conserve.
5. Enfin, Millikan a montré en 1906 (Prix Nobel 1923) que la charge électrique est quantifiée. C'est en étudiant la chute de microscopiques gouttes d'huile électrisées, entre les armatures d'un condensateur, qu'il mit en évidence le caractère discontinu de la charge :

$$q = Ne \quad \text{avec} \quad N \in \mathbb{Z}$$

où e désigne la **charge élémentaire**. De nos jours, on sait que ce caractère granulaire de la charge trouve son origine dans la structure atomique de la matière : tout corps matériel est constitué d'atomes eux même formés d'un noyau chargé positivement (découvert en 1911 par Rutherford) autour duquel « gravitent » des électrons, particules élémentaires possédant toutes la même charge $q_e = -e$. La plupart des phénomènes électriques sont liés à un déplacement et/ou apport et/ou retrait d'électrons à la matière.

Le concept de charge permet d'expliquer les différents expériences décrites précédemment :

Expérience 1 Lorsqu'on approche la baguette électrisée de la sphère métallique, les électrons libres du métal sont attirés par le verre chargé positivement, laissant derrière eux des charges positives. Bien que la charge globale reste nulle, la force résultante est attractive : en effet, l'attraction entre les électrons et le verre l'emporte sur la répulsion entre les charges positives du conducteur et le verre.

Après un contact, quelques électrons sont transférés sur la baguette en verre ce qui rend la sphère métallique globalement positive d'où la répulsion observée [2].

Expérience 2 Le frottement d'un corps sur un autre induit un transfert d'électrons dans un sens qui dépend des corps frottés l'un contre l'autre. C'est pourquoi, il est possible d'électriser positivement ou négativement une baguette. On peut donc produire une répulsion ou une attraction.

Expérience 3 Les charges positives du verre électrisé attirent les électrons libres du plateau métallique faisant apparaître au niveau de l'aiguille et de la tige métallique un défaut d'électrons (des charges +). L'aiguille métallique est alors d'autant plus repoussée par la tige qu'elle est chargée. La rotation de l'aiguille est donc d'autant plus importante que la baguette se rapproche.

1.1.3 Loi de Coulomb

À la fin du XVIII^{e} siècle, l'idée que les charges produisent une force de type newtonien (en $1/r^2$) était une hypothèse séduisante mais difficile à prouver expérimentalement.

L'expérience de Coulomb

C'est en 1785 que Coulomb [3] met en évidence, à l'aide d'une balance de torsion qu'il a réalisée lui-même, la loi qui porte désormais son nom. L'expérience consiste à fixer une boule de sureau B à l'extrémité d'une tige isolante, suspendue en son milieu à un fil d'argent dont on peut contrôler l'angle de torsion. Ce système étant au repos, on approche une autre boule A tenue par une tige isolante au contact de la boule B. Ensuite, on électrise les deux boules simultanément de sorte qu'elle acquièrent la même charge Q. La boule A est maintenue en place et la boule B s'éloigne sous l'action de la force électrique. À l'équilibre, le moment de la force électrique compense le couple de torsion. Il suffit ensuite d'augmenter, de façon contrôlée, la torsion du fil pour rapprocher les boules et mesurer la force pour des distances plus faibles. C'est ainsi que Coulomb trouva que la force électrique varie en $1/r^2$.

> **Remarque** : les résultats de Coulomb furent contestés en son temps et il faudra une vingtaine d'années pour que la loi en $1/r^2$ s'impose partout, plus pour la validité de ses conséquences que par les mesures de Coulomb. L'histoire a finalement retenu la démonstration expérimentale de Coulomb. Cependant, il ne faudrait pas oublier la contribution de Cavendish, un brillant expérimentateur, qui, avant Coulomb, a réussi à montrer de façon fort élégante que l'interaction électrique pouvait se décrire par une force en $1/r^n$ avec $n = 2,00 \pm 0,04$; résultat beaucoup plus précis que celui de Coulomb (*cf.* http://www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique/zoom/coulomb/mathematisation/).

2. Il faut quand même signaler que lorsque l'expérience est réalisée avec une baguette faiblement électrisée, la sphère conductrice vient s'y coller sans être ensuite repoussée : c'est le phénomène d'adhérence électrique. En revanche si la baguette est suffisamment chargée, la pression entre les deux corps est plus forte ce qui favorise un transfert d'électrons. À l'extrême, lorsque le verre est fortement chargée, le transfert de charge s'effectue sans qu'il y ait contact, mais par un simple effet de pointe (*cf.* le chapitre 4 sur les conducteurs)

3. **Charles-Augustin Coulomb (1736-1806)** : ingénieur militaire français et fin expérimentateur distingué par l'Académie des Sciences. Il est connu pour ses travaux sur l'électricité et le magnétisme, son invention du pendule de torsion et ses travaux sur les frottements.

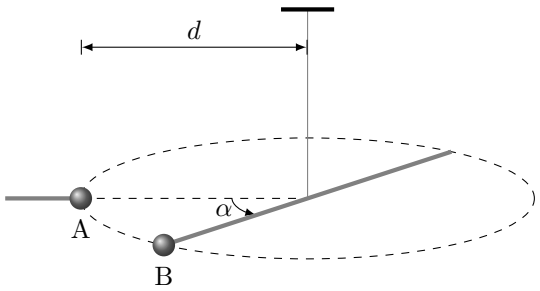
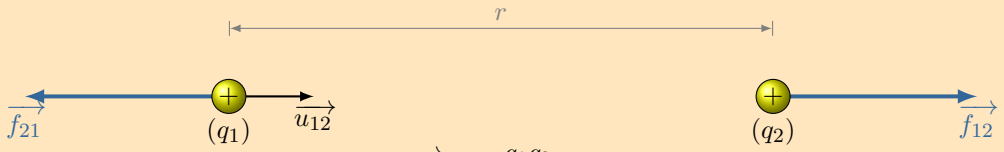


FIGURE 1.2 – Expérience de Coulomb.

Pour résumer, la force électrique - dite aussi *force coulombienne* - entre deux charges ponctuelles immobiles dans le vide varie comme l'inverse du carré de la distance qui les sépare et dépend de leur quantité de charge.

Loi de Coulomb



$$\overrightarrow{f_{12}} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u_{12}} \tag{1.1}$$

où $\overrightarrow{u_{12}}$ est un vecteur unitaire. Dans le Système International d'Unités, les charges s'expriment en coulomb (symbole : C) et la constante K vaut

$$K \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9,0.10^9 \text{ m.F}^{-1}$$

où ε_0 désigne la *permittivité diélectrique du vide* [a].

a. La permittivité diélectrique du vide est, dans le Système International, définie à partir de deux constantes fondamentales, la *perméabilité magnétique du vide* $\mu_0 \equiv 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} et la vitesse de la lumière dans le vide $c \equiv 299\,792\,458$ m.s^{-1}. En effet on a $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$ de telle sorte que K est une constante fondamentale qui vaut $K = \frac{c^2}{10^7} = 8\,987\,551\,787$ m.F^{-1}.

Exercice

Dans l'atome d'hydrogène, comparer la force électrique que ressent l'électron de la part du proton avec la force gravitationnelle. On donne la charge élémentaire $e = 1,6.10^{-19}$ C, la masse de l'électron $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg et la masse du proton $m_p = 1,66.10^{-27}$ kg.

Le rapport de la force électrique sur la force gravitationnelle vaut

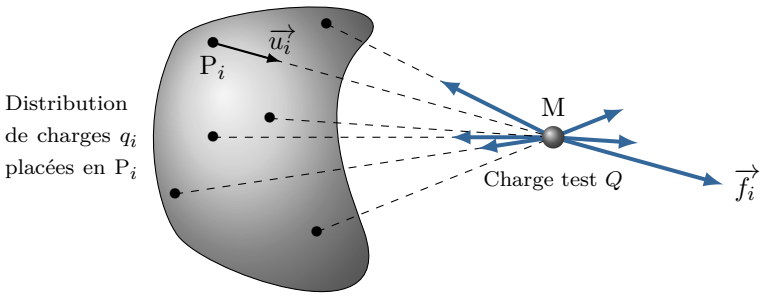
$$\frac{f_e}{f_g} = \frac{K\,e^2}{\mathcal{G} m_e m_p} = \frac{9,0.10^9 \times (1,6.10^{-19})^2}{6,67.10^{-11} \times 9,1.10^{-31} \times 1,66.10^{-27}} = 2,3.10^{39} \gg 1$$

L'interaction gravitationnelle est complètement négligeable devant l'interaction électrostatique.

1.2 Le champ électrique

1.2.1 Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Considérons une distribution de charges ponctuelles $(q_1, \ldots, q_N)$ placées en différents points $\mathrm{P}_{i=1\ldots N}$ et une charge test Q placée en M. Cherchons à exprimer la force qu'exerce cette ensemble de charges sur la charge test.



On admet que l'interaction électrique obéit au principe de superposition : la force résultante est *la somme vectorielle* des forces qu'exercent chacune des charges q_i sur la charge Q soit

$$\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{f_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{Qq_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_i}}{r_i^2} \quad \text{avec} \quad r_i = \mathrm{P_iM}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\overrightarrow{F} = Q\,\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_i}}{r_i^2} \quad \heartsuit \tag{1.2}$$

Où $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ désigne le champ électrique créé en M par la distribution de charges. Ce vecteur est défini en tout point de l'espace[4] : il s'agit d'un **champ vectoriel**. On peut voir $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ comme une propriété locale de l'espace. Notez que lorsque l'on change la charge q_i en q_i' cela modifie le champ électrique en M mais de façon non instantané. On verra que toute perturbation électromagnétique se propage à la vitesse de la lumière dans le vide.

Ordre de grandeur

Dans le Système d'Unités International, l'intensité du champ électrique se mesure en **volt par mètre** (symbole $\mathrm{V.m^{-1}}$). Le champ à la surface de la Terre vaut environ 100-150 V/m en dehors des périodes d'orage. En période d'orage, le champ terrestre est inversé et est de l'ordre de 10 kV/m. Il peut même atteindre 100 kV/m près des pointes conductrices.
La lumière solaire qui nous arrive sur Terre est une **onde électromagnétique** : le champ électrique de l'onde est de l'ordre de (en valeur efficace) 1000 V/m.
Dans l'atome, la cohésion est assurée grace à des champs électriques énormes, de l'ordre de 100 GV/m.

4. Ce champ diverge lorsque $\mathrm{M} = \mathrm{P}_i$. Cette divergence provient d'une modélisation qui n'est plus valide dès que l'on s'approche de trop près des charges : la charge ponctuelle n'existe pas en réalité, il faut reconsidérer la modélisation dans ce cas.

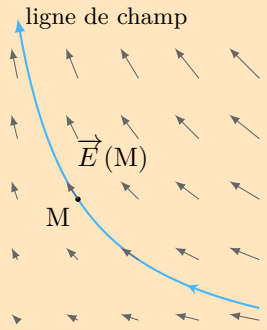
1.2.2 Topographie - Symétrie

Décrivons différentes situations pour dégager quelques propriétés du champ électrique. Tout d'abord, la représentation d'un champ vectoriel fait généralement appel à la notion de *ligne de champ*.

Ligne de champ

Pour représenter un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(x,y,z)$, on trace des courbes orientées $\mathcal{C}$ telles que leur tangente, en chaque point $\mathrm{M}(x,y,z)$, ait la même direction et le même sens que le champ vectoriel en ce point. Ces courbes sont des lignes de champ.
D'un point de vue mathématique, si l'on note $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, le vecteur déplacement infinitésimal le long de la ligne de champ $\mathcal{C}$, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{A}(M) = \overrightarrow{0} \quad \text{pour tout M} \in \mathcal{C}$$

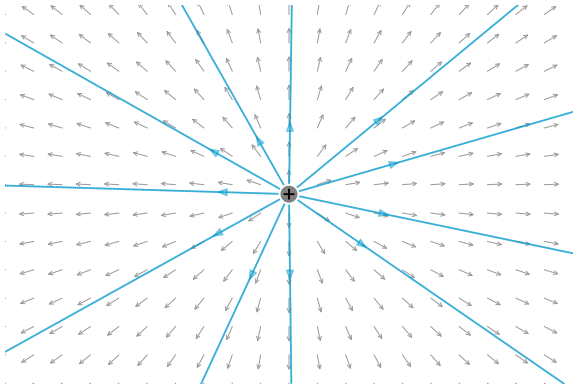


Champ créé par une charge ponctuelle

Plaçons une charge ponctuelle q à l'origine d'un repère et calculons le champ électrique créé en un point M de l'espace situé à la distance r de l'origine. On obtient

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_i}}{r_i^2} = \frac{q\,\overrightarrow{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

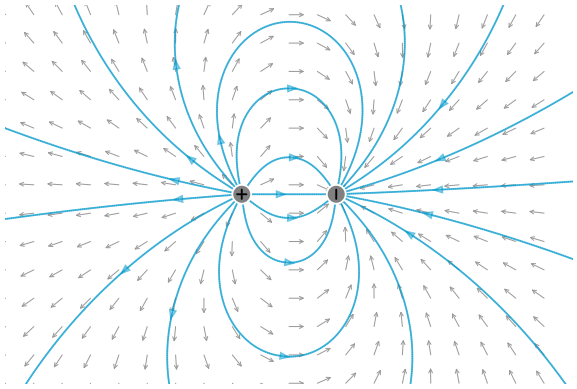
où $\overrightarrow{u_r}$ désigne le vecteur unitaire radial du système de coordonnées sphériques.



On peut voir ci-dessus la carte du champ électrique créé par une telle charge ponctuelle. Notez que les vecteurs sont normalisés de sorte qu'ils indiquent seulement la direction et le sens du champ électrique. On a jouté quelques lignes de champ. On observe que le champ est radial et centrifuge si la charge est positive. Evidemment, si l'on inverse le signe de la charge, les lignes de champ sont radiales et orientées vers la charge.

Champ créé par un doublet

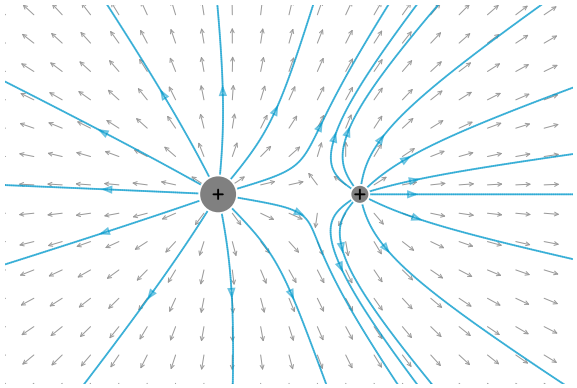
Considérons deux charges ponctuelles de signe opposé, q et $-q$. Ce système forme ce que l'on appelle un doublet électrostatique. Regardons la carte de champ correspondante.



On peut voir que les lignes de champ partent de la charge positive pour converger vers la charge négative sans jamais se refermer. Par ailleurs, la distribution présente un plan de symétrie (plan miroir, horizontal ici). On constate que pour tout point M de ce plan, $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ est dans ce plan. La distribution présente également un plan d'antisymétrie (plan vertical équidistant des deux charges) qui échange le signe des charges après une opération miroir. On peut noter que pour tout point M de ce plan, $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ est perpendiculaire à ce plan.

Champ créé par deux charges de même signe

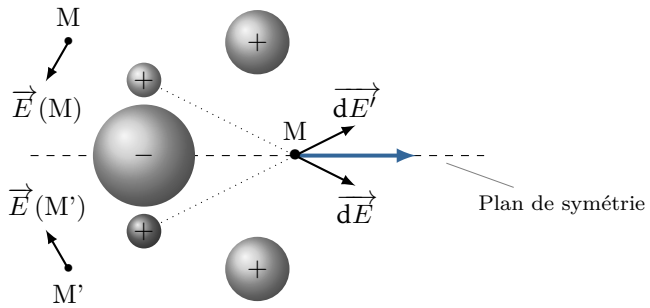
Considérons deux charges de même signe et de valeur différente situées sur un axe horizontal.



On peut faire les mêmes remarques que précédemment. Les lignes de champ partent des charges positives. Là encore, les lignes de champ, ne se referment pas sur elles mêmes. En terme de symétrie, la distribution de charges présente un plan de symétrie horizontal et, comme précédemment, pour tout point M de ce plan, $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ est dans ce plan. En revanche, la distribution ne présente pas de plan d'antisymétrie. Enfin, il existe un point ou le champ est nul situé entre les deux charges. Ce point est un *point singulier*.

Symétries

Les exemples précédents mettent en évidence quelques propriétés de symétrie très générales.

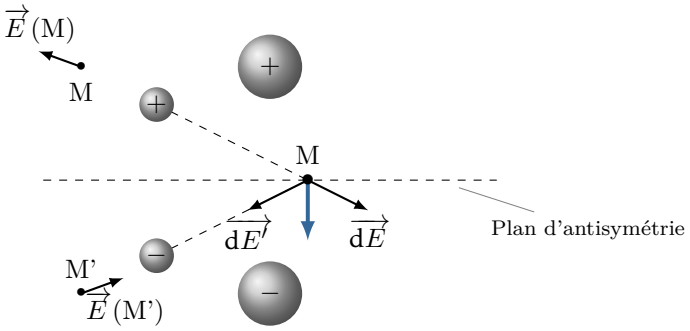


Supposons qu'une distribution présente un plan de symétrie $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que la distribution de charge est *invariante par rapport à une réfléxion de plan* $\mathcal{P}$. On montre alors que le plan se comporte également comme un miroir vis-à-vis du champ électrique. Autrement dit, si l'on note M' l'image de M par une symétrie de plan $\mathcal{P}$, on a

$$\overrightarrow{E}(\text{M'}) = \text{sym}(\overrightarrow{E}(\text{M}))$$

Intéressons nous aux points situés dans le plan de symétrie. On voit alors qu'à tout point P de la distribution, créant un champ $\overrightarrow{dE}(\text{M})$, correspond un point symétrique P' créant un champ $\overrightarrow{dE}'(\text{M})$ telle que $\overrightarrow{dE}(\text{M}) + \overrightarrow{dE}'(\text{M})$ se trouve dans le plan $\mathcal{P}$. Ainsi le champ résultant $\overrightarrow{E}(\text{M})$ est nécessairement dans le plan $\mathcal{P}$. Une conséquence immédiate est que le champ électrique est nécessairement nul au centre de symétrie d'une distribution.

Supposons maintenant que la distribution change de signe par rapport à un plan $\mathcal{P}'$. On dit alors que $\mathcal{P}'$ est un plan anti-symétrique.



Cette symétrie se retrouve également dans le champ électrique : si l'on note M' l'image de M par une symétrie de plan $\mathcal{P}'$, on a

$$\overrightarrow{E}(\text{M'}) = -\text{sym}\,\overrightarrow{E}(\text{M})$$

Cherchons le champ créé en un point M$\in \mathcal{P}'$. On voit alors qu'à tout point P de la distribution, créant un champ $\overrightarrow{dE}(\text{M})$, correspond un point symétrique P' créant un champ $\overrightarrow{dE}'(\text{M})$ telle que $\overrightarrow{dE}(\text{M}) + \overrightarrow{dE}'(\text{M})$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}'$. Ainsi le champ résultant $\overrightarrow{E}(\text{M})$ est nécessairement perpendiculaire au plan $\mathcal{P}'$.

En tout point d'un plan de symétrie, le champ électrique est contenu dans ce plan.
En tout point d'un plan d'anti-symétrie, le champ électrique est perpendiculaire à ce plan.
De manière plus générale, lorsque que certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétries des causes doivent se retrouver dans les effets produits (Principe de Curie). Ici, les causes sont représentées par la distribution de charges et les effets par le champ électrostatique.

1.2.3 Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

Fonction de répartition

On sait que toute distribution de charges est rigoureusement discontinue puisque tout transfert de charge ne se fait que par multiple entier de e. Cependant, à l'échelle macroscopique, un corps électrisé par frottement acquiert facilement une quantité de charge de l'ordre de

$$q = Ne \simeq \text{qques nC} \quad \text{soit} \quad N \simeq 10^{10} \gg 1$$

Le nombre de particules est si grand que l'aspect discontinue passe inaperçu. On peut alors décrire la distribution de charges comme une *répartition continue de charges* et définir une fonction de répartition.

La **densité volumique de charge** $\rho_{\text{e}}(\text{M})$ décrit la répartition en volume d'une quantité de charge. En un point M contenu dans un volume infinitésimal $\mathrm{d}V$, la quantité de charge s'écrit

$$\mathrm{d}q = \rho_{\text{e}}(\text{M})\,\mathrm{d}V$$

où $\rho_{\text{e}}(\text{M})$ s'exprime en C.m^{-3}. Si le milieu est homogène $\rho_{\text{e}} = q_{\text{total}}/V = \text{C}^{\text{te}}$.

La **densité surfacique de charge** $\sigma(\text{M})$ décrit une répartition en surface d'une quantité de charge. En un point M contenu dans un élément d'aire infinitésimal $\mathrm{d}S$, la quantité de charge s'écrit

$$\mathrm{d}q = \sigma(\text{M})\,\mathrm{d}S$$

où $\sigma(\text{M})$ s'exprime en C.m^{-2}. Si le milieu est homogène $\sigma = q_{\text{total}}/S = \text{C}^{\text{te}}$.

Enfin, la **densité linéique de charge** caractérise la répartition de la charge le long d'un fil chargé. Pour un élément de longueur infinitésimal $\mathrm{d}\ell$ situé en M, la quantité de charge s'écrit

$$\mathrm{d}q = \lambda(\text{M})\,\mathrm{d}\ell$$

où $\lambda(\text{M})$ s'exprime en C.m^{-1}.

Le passage du discret au continu pour le calcul du champ électrostatique transforme la somme en une intégrale :

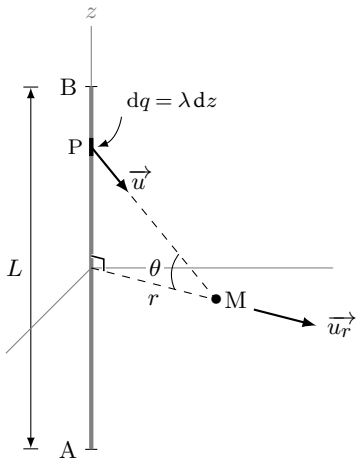
$$\overrightarrow{E}(\text{M}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_i}}{{r_i}^2} \quad \xrightarrow{N\to\infty} \quad \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u}}{r^2} \quad \heartsuit \tag{1.3}$$

où $\mathcal{D}$ représente le domaine d'intégration (volume, surface, ligne). Suivant le type de problème, on remplacera $\mathrm{d}q$ par $\rho_e\,\mathrm{d}V$ ou $\sigma\,\mathrm{d}S$ ou $\lambda\,\mathrm{d}\ell$. Le calcul de cette intégrale est en général grandement simplifié si la distribution présente des symétries. C'est pourquoi, avant tout calcul direct, il est conseillé de faire une première analyse des propriétés de symétrie.

> **Remarque** : Les densités de charge introduites sont des grandeurs considérées locales à notre échelle, mais sont en réalité le résultat d'une moyenne effectuée à une échelle intermédiaire entre l'échelle atomique (ou la densité de charge varie de façon extrêmement brutale et erratique) et l'échelle macroscopique. Ainsi, l'intégrale (1.3) représente un champ local moyenné qui a, certes, le bon goût de varier continument, mais qui n'a plus de sens à l'échelle atomique.

Exemple : **Champ créé dans le plan médiateur d'un segment chargé**

On considère un segment AB de longueur L, contenant une charge Q uniformément répartie le long du segment. On cherche à calculer le champ électrique créé dans un plan médiateur du segment à la distance r. Ici la densité de charge est constante : $\lambda = Q/L$. Le plan médiateur est un plan de symétrie et le plan contenant le fil également de sorte que le champ est radial dirigé suivant le vecteur polaire $\overrightarrow{u}_r$. Par ailleurs, par symétrie de révolution, le champ ne dépend que de r. Nous avons donc



$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = E_r\,\overrightarrow{u_r}$$

Il suffit donc de calculer la composante radiale du champ :

$$E_r = \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{u_r} = \int \frac{\mathrm{d}q\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 \mathrm{PM}^2} = \int_{\mathrm{AB}} \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 \mathrm{PM}^2}\,\mathrm{d}z$$

Attention à ne pas écrire $E = \int \mathrm{d}E$ car la somme d'une norme n'est pas égale, en général, à la norme de la somme. Les variables PM, z et θ étant liées, il faut choisir une variable d'intégration. L'angle θ est un bon choix. À l'aide des relations $\mathrm{PM} = r/\cos\theta$ et $z = r\tan\theta$ (et donc $\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}\theta/\cos^2\theta$), on a

$$E_r = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r}\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} 2\sin\theta_0 \quad \text{avec} \quad \sin\theta_0 = \frac{L}{2\sqrt{r^2+(L/2)^2}}$$

on peut finalement écrire le champ électrique :

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{Q}{\sqrt{r^2+(L/2))^2}}\overrightarrow{u_r}$$

Remarquons que pour $r \to \infty$ on retrouve $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ce qui est cohérent avec le fait qu'à grande distance le segment est assimilable à une charge ponctuelle.

2 – POTENTIEL ET ÉNERGIE ÉLECTRIQUES

La force électrostatique présente les même propriétés que la force gravitationnelle, à savoir qu'elle est conservative ce qui permet d'introduire tout naturellement les notions d'énergie et de potentiel électrostatique. La connaissance du potentiel suffit alors à décrire complètement les effets électriques.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

http://femto-physique.fr/electromagnetisme/potentiel_electrostatique.php

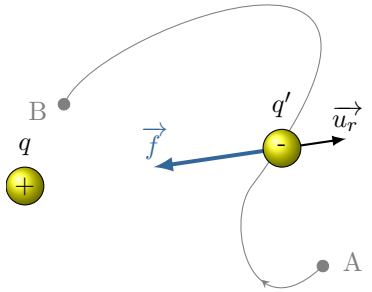
Sommaire

2.1 Potentiel électrostatique 15
2.1.1 Énergie d'interaction entre deux charges ponctuelles 15
2.1.2 Potentiel électrostatique 15
2.1.3 Topographie 17
2.1.4 Notion de tension électrique 18
2.2 L'énergie électrostatique 18
2.2.1 Énergie potentielle d'une charge dans un champ extérieur 19
2.2.2 Énergie potentielle d'interaction d'un système de charges ponctuelles . . 19

2.1 Potentiel électrostatique

2.1.1 Énergie d'interaction entre deux charges ponctuelles

Pour introduire la notion de potentiel électrostatique, intéressons nous à l'interaction entre deux charges électriques q et q'. Supposons la première charge fixe et l'autre se déplaçant entre deux points A et B suivant un parcours $\mathcal{C}$ quelconque.



En vertu de la loi de Coulomb, la charge q' subit au cours de son mouvement une force

$$\overrightarrow{f} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$

où $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire dirigé de la charge q vers la charge q'. Cette force produit un travail mécanique

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{f}\cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{\ell}$$

Le déplacement présente une composante parallèle à $\overrightarrow{u_r}$ et une composante perpendiculaire : $\mathrm{d}\,\overrightarrow{\ell} = \mathrm{d}\,\overrightarrow{\ell_\perp} + \mathrm{d}\,\overrightarrow{\ell_{||}}$. La composante parallèle, la seule qui nous intéresse pour le calcul du travail, correspond au déplacement radial $\mathrm{d}\,\overrightarrow{\ell_{||}} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r}$ de sorte que le travail s'écrit

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \int_{\mathcal{C}} \frac{q'q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

On constate que le travail ne dépend pas du trajet emprunté par la particule entre A et B : **la force électrique est une force conservative**. On peut donc définir une énergie potentielle électrique $\mathcal{E}_\mathrm{p}$. Or, on sait (cf. cours de mécanique) que

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -\Delta\mathcal{E}_\mathrm{p} = \mathcal{E}_\mathrm{p}(\mathrm{A}) - \mathcal{E}_\mathrm{p}(\mathrm{B})$$

ce qui donne, à une constante près (sans signification physique)

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{p} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}} \ \heartsuit \tag{2.1}$$

Finalement, en voyageant dans l'espace, la particule « puise une énergie potentielle dans le champ électrique ».

2.1.2 Potentiel électrostatique

Poursuivons notre raisonnement en faisant intervenir le champ électrique. On peut dire que la charge q' se déplace dans un champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé par q ce qui produit une force $\overrightarrow{f} = q'\overrightarrow{E}$. Cette force conservative est reliée à l'énergie potentielle *via* la relation $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_\mathrm{p}$ d'où l'on tire facilement

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$

L'opérateur « gradient »
L'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$ est un opérateur *différentiel linéaire*. Il s'applique à une fonction scalaire de l'espace (champ scalaire) et retourne une fonction vectorielle de l'espace (champ vectoriel). Il se lit *gradient* ou *nabla* et se note :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\nabla}\, f(x,y,z)$$

L'expression de l'opérateur gradient dépend du système de coordonnées. En coordonnées cartésiennes on retiendra la formule suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

On voit donc que le champ électrique créé par une charge ponctuelle **est le gradient d'une fonction**. Cette propriété se généralise. En effet, comme le champ électrique créé par une distribution de charges est la somme de tous les champs individuels et que l'opérateur gradient est linéaire, il est facile de montrer que le champ créé par une distribution de charges peut toujours s'écrire

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\text{M}) \equiv -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(\text{M})} \ \heartsuit \tag{2.2}$$

Cette relation définit la fonction $V(\text{M})$ appelée le **potentiel électrostatique au point M**.

On vient de voir que le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle q s'écrit

$$V(\text{M}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{[charge ponctuelle]}$$

Il en découle, en vertu du principe de superposition, l'expression générale pour une distribution de charges $(q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_N)$:

$$\boxed{V(\text{M}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\, r_i}} \ \heartsuit \tag{2.3}$$

Le passage discret $\rightarrow$ continu s'obtient par l'intégrale

$$\boxed{V(\text{M}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\, r}} \ \heartsuit \tag{2.4}$$

où $dq = \lambda\, \mathrm{d}\ell$ ou $\sigma\, \mathrm{d}S$ ou $\rho_e\, \mathrm{d}V$ suivant le type de distribution [1].

Le potentiel s'exprime en **volt** (symbole : V), en hommage à Volta [2]. Une analyse dimensionnelle montre que $[V] = [E]\, L$ de sorte que le champ électrique peut s'exprimé en V.m^{-1}.

Finalement, on peut dire qu'un ensemble de charges électriques fixes produit un champ de potentiel $V(\text{M})$ et que toute charge q « baignant » dans ce champ subit une force

$$\overrightarrow{f} = -q\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

La connaissance du potentiel $V(\text{M})$ permet de connaître le champ électrique $\overrightarrow{E}(\text{M})$ et vice versa.

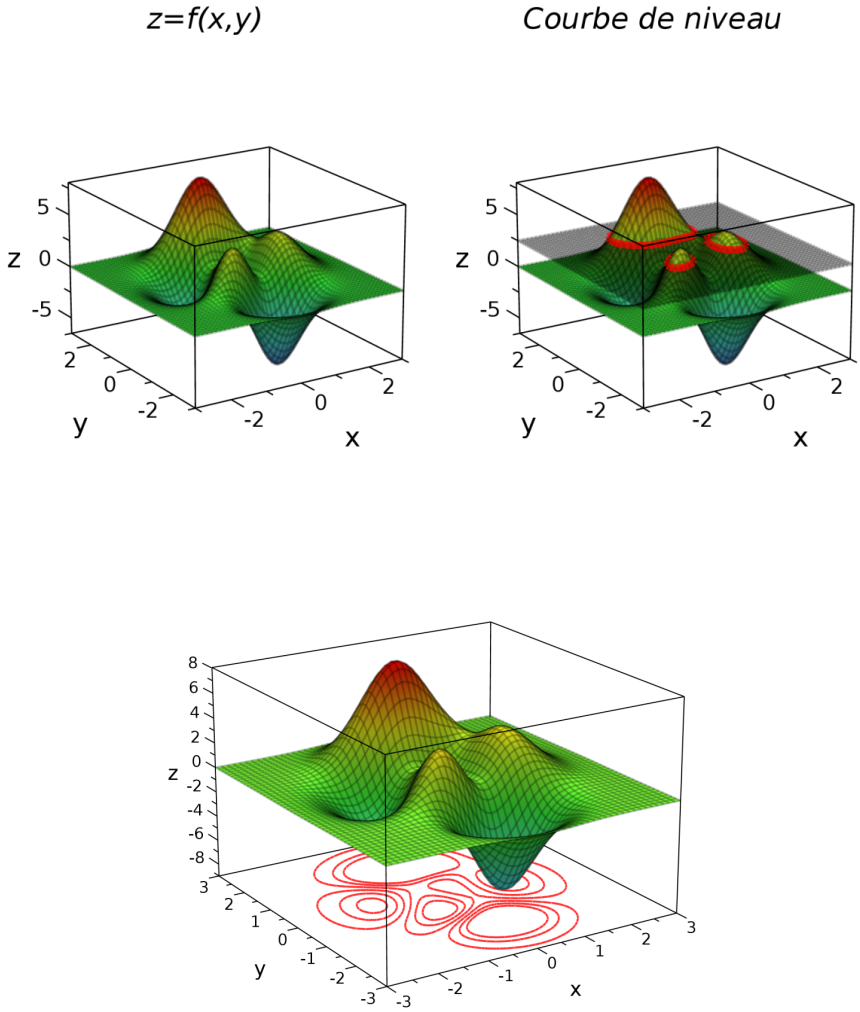
> **Remarque** : La relation (2.2) implique que le potentiel est défini à une constante additive près, dont la valeur est arbitraire. En l'absence d'autres conventions, nous ferons le choix de la prendre égale à zéro.

1. Il faut noter cependant que le passage discret $\rightarrow$ continu introduit des difficultés mathématiques. Par exemple, l'intégrale citée diverge pour un segment infini uniformément chargé. Cette divergence est levée dès que la taille du système devient fini ce qui montre qu'elle est liée à une modélisation non physique.
2. **Alessandro Volta (1745 -1827)** : physicien italien et inventeur de la première pile en 1800.

2.1.3 Topographie

En général, le potentiel $V(\mathrm{M})$ dépend des trois coordonnées de l'espace mais, pour simplifier, nous allons supposer que le champ $V(\mathrm{M})$ ne dépend que de deux coordonnées, disons x et y. Cela revient finalement à étudier le potentiel dans un plan particulier. Il y a deux façons de représenter le champ scalaire $V(x,y)$:

1. On peut tracer l'ensemble des points $z = V(x,y)$ dans un repère cartésien et l'on obtient alors une surface donnant l'évolution du potentiel. En chaque point de cette surface, la plus grande pente donne accès au gradient du potentiel, c'est-à-dire au champ électrique. Plus exactement le champ électrique
$$\overrightarrow{E} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}$$
correspond à la plus grande pente dans le sens de la descente. Ainsi le champ électrique est nul pour les points (x,y) correspondant aux sommets, vallées ou col de la surface. On comprend aussi pourquoi les lignes de champ ne se referment pas : en effet, si l'on suit un chemin qui ne cesse de descendre, on ne pourra jamais revenir au point de départ.
2. À l'instar des cartes topographiques, on préfère souvent représenter des **équipotentielles**, c'est-à-dire des courbes de niveau correspondant à une unique valeur de potentiel.



Les Différentes Représentations

> **Remarque** : Si le potentiel ne dépend que de deux coordonnées, l'équipotentielle $V(x,y) = \mathrm{C^{te}}$ est **une courbe**. En revanche, si le potentiel dépend de trois coordonnées, l'équipotentielle $V(x,y,z) = \mathrm{C^{te}}$ correspond à **une surface**.

Relation entre les lignes de champ électrique et les équipotentielles

Considérons un point M se déplaçant le long d'une équipotentielle particulière. Le potentiel conservant une valeur constante, on a $\mathrm{d}V = 0$. Or, on peut écrire

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = -\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$$

Ainsi, le long d'une équipotentielle, on a $\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = 0$ ce qui signifie que si l'on se déplace le long d'une équipotentielle, on croise toujours le champ électrique avec un angle droit. Autrement dit, **les lignes de champ électriques sont perpendiculaires aux équipotentielles**.

En conséquence, si la distribution de charges présente un plan d'antisymétrie, celui-ci est nécessairement une surface équipotentielle puisque le champ y est perpendiculaire.

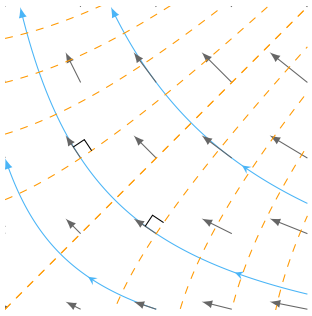


FIGURE 2.1 – Les équipotentielles (en pointillées) coupent les lignes de champ (en bleu) à angle droit.

2.1.4 Notion de tension électrique

Par définition, la tension électrique est une différence de potentiel électrique ou *d.d.p.* entre deux points. On notera U_{AB} la *d.d.p* entre A et B :

$$U_{\mathrm{AB}} \equiv V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) \quad \heartsuit \tag{2.5}$$

La tension, comme le potentiel électrique, s'exprime en volt. Notez que si le potentiel présente une indétermination, la tension est par contre bien déterminée ce qui en fait une grandeur mesurable indépendante du choix arbitraire de l'origine des potentiels.

La connaissance du champ électrique en tout point d'une région de l'espace permet de calculer la tension entre deux points de cette région par un calcul intégral :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}V = V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) = U_{\mathrm{AB}} \quad \heartsuit \tag{2.6}$$

En conséquence, si le champ électrique possède une norme constante E le long d'une ligne de champ, la tension existante entre deux points de cette ligne de champ distants de d vaut $U = Ed$.

Électronique	**Piles**	**Électrotechnique** (moteurs, centrales)
μ V - V	1-10 V	100 V - 400 kV

TABLE 2.1 – Ordres de grandeur

2.2 L'énergie électrostatique

Nous distinguerons deux cas de figure.

1. Soit une charge électrique est plongée dans un champ électrique créé par un système électrique extérieur. On dira que la charge est en interaction avec un champ électrique extérieur et on montrera que l'on peut définir une énergie potentielle électrique.
2. Soit N charges sont en interaction mutuelle. On montrera que ce système de charges possède une énergie potentielle interne.

2.2.1 Énergie potentielle d'une charge dans un champ extérieur

La force électrostatique que subit une charge q plongée dans un champ extérieur $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$ vaut $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$. En vertu de la définition du potentiel électrique, on a

$$\overrightarrow{E}_{\text{ext}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_{\text{ext}}$$

où V_{ext} désigne le potentiel électrique. On peut aussi écrire

$$\boxed{\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}_{\text{ext}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{E}_{\text{p}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{\text{p}} = qV_{\text{ext}}} \ \heartsuit \tag{2.7}$$

où $\mathcal{E}_{\text{p}}$ désigne **l'énergie potentielle électrostatique**. Cette énergie s'exprime en joule et n'est pas à confondre avec le potentiel électrostatique.

L'électron-volt
Une charge électrique q soumise à un champ électrique voit donc son énergie cinétique varier suivant la relation (conservation de l'énergie) :

$$\mathcal{E}_{\text{c A}} + qV_A = \mathcal{E}_{\text{c B}} + qV_B \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{c B}} = \mathcal{E}_{\text{c A}} + qU_{AB}$$

Autrement dit, le gain d'énergie ne dépend que de la tension électrique entre la position initiale et la position finale :

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{c}} = qU_{AB}$$

Lorsque $q = e$ et $U_{AB} = 1$ V, le gain d'énergie vaut, *par définition*, 1 électron-volt. Ainsi,

$$1\,\text{eV} = 1,6.10^{-19}\,\text{J}$$

2.2.2 Énergie potentielle d'interaction d'un système de charges ponctuelles

Considérons tout d'abord le cas de deux charges ponctuelles q_1 et q_2 en interaction dans le vide, à la distance r_{12} l'une de l'autre. On peut considérer que la charge q_1 est plongée dans le potentiel électrostatique créé par q_2 :

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = q_1V_2(1) = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

On aurait pu retrouver ce résultat en raisonnant avec l'autre charge de telle sorte que

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = q_2V_1(2) = q_1V_2(1) = \frac{1}{2}\left(q_1V_2(1) + q_2V_1(2)\right)$$

Considérons maintenant le cas de N charges ponctuelles q_i en interaction dans le vide, à la distance r_{ij} l'une de l'autre. Chaque charge est en interaction avec $N-1$ autres charges ce qui donne au total $\frac{1}{2}N(N-1)$ couples en interaction :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{p int}} = \sum_{<i,j>_{i\neq j}} \frac{q_iq_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i \sum_{j\neq i} V_j(i) = \frac{1}{2}\sum_i q_iV(i)} \ \heartsuit \tag{2.8}$$

où $V(i)$ est le potentiel électrique dans lequel est plongée la charge q_i. Le facteur $\frac{1}{2}$ permet de ne pas compter deux fois les mêmes couples. On peut noter qu'une valeur négative de l'énergie signifie que le système se trouve dans un état plus stable que si les particules étaient séparées à l'infini (dans ce cas $\mathcal{E}_{\text{p int}} = 0$).

Exercice
Calculer l'énergie électrostatique d'une distribution de 4 charges ponctuelles q identiques disposées sur un carré d'arête a. On prendra la convention habituelle (potentiel nul à l'infini).

Les quatre charges jouant le même rôle, on a

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2}\left(4 \times qV\right)$$

où V représente le potentiel dans lequel est plongée une charge. Celle-ci est entourée par trois charges situées à la distance, a, $a\sqrt{2}$ et a. Ainsi, le potentiel s'écrit

$$V = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right)$$

Finalement, ce système présente une énergie d'interaction électrique

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}(4 + \sqrt{2})$$

3 – LE DIPÔLE ÉLECTRIQUE

Les faits montrent que des corps neutres peuvent malgré tout interagir via des forces de nature électriques, dite dipolaires. Ce cours aborde ces aspects qui jouent un rôle important dans la modélisation des interactions moléculaires ainsi que dans le phénomène de polarisation de la matière en général.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

http://femto-physique.fr/electromagnetisme/dipole_electrique.php

Sommaire

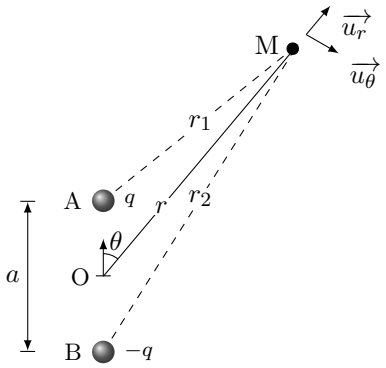
3.1 L'approximation dipolaire 22
3.1.1 Potentiel créé par un doublet électrostatique 22
3.1.2 Généralisation 23
3.1.3 Moment dipolaire électrique 24
3.1.4 Champ électrique dans l'approximation dipolaire 25
3.2 Interactions dipolaires 27
3.2.1 Énergie d'un dipôle dans un champ électrique extérieur 27
3.2.2 Dipôle rigide dans un champ uniforme 28
3.2.3 Dipôle rigide dans un champ non uniforme 29
3.2.4 Interactions de van der Waals 29

3.1 L'approximation dipolaire

3.1.1 Potentiel créé par un doublet électrostatique

On appelle doublet électrostatique, un ensemble de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$ séparées d'une distance a. Sur la figure ci-contre, on note que l'axe AB est un axe de révolution. De plus, le plan contenant le doublet et le point M, est un plan de symétrie de la distribution. Par conséquent,

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = E_r(r,\theta)\,\overrightarrow{u_r} + E_\theta(r,\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}$$



Si l'on note $r_1 = \mathrm{AM}$ et $r_2 = \mathrm{BM}$, le potentiel créé par ce doublet en un point M s'écrit

$$V(\mathrm{M}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Notons que l'équipotentielle $V = 0$ est l'ensemble des points telles que $r_1 = r_2$ ce qui correspond au plan médiateur du segment [AB], lequel représente également un plan d'antisymétrie de la distribution.

Cherchons maintenant à calculer le potentiel loin du doublet ; c'est-à-dire à une distance $r \gg a$. Calculons le terme prépondérant du potentiel à l'aide d'un développement limité. On a (théorème de Pythagore généralisé)

$$r_1^2 = \left\| \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} \right\|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 - ar\cos\theta$$

D'où

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 - \frac{a\cos\theta}{r}\right]^{-1/2}$$

Si on se contente d'une approximation à l'ordre 1 en a/r, on trouve

$$\frac{1}{r_1} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a\cos\theta}{2r}\right)$$

De même pour $1/r_2$ ($\theta \to \pi - \theta$) :

$$\frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a\cos\theta}{2r}\right)$$

Finalement, loin du dipôle, on peut approcher le potentiel par

$$V \simeq \frac{qa\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour} \quad r \gg a$$

Cela constitue *l'approximation dipolaire*. On remarque que le potentiel décroît à grande distance comme $1/r^2$. En effet, loin du doublet, on « voit » une charge totale nulle ce qui explique que les effets électriques diminuent plus vite que ceux d'une charge ponctuelle.

Moment dipolaire électrique

On note également que le potentiel dépend du produit qa qui représente le *moment dipolaire électrique* du doublet. On définit le moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ du doublet par

$$\boxed{\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{\mathrm{BA}}} \ \heartsuit \tag{3.1}$$

orienté de la charge négative vers la charge positive. Ce moment s'exprime en C.m. On peut alors exprimer le potentiel dans l'approximation dipolaire à l'aide du moment dipolaire :

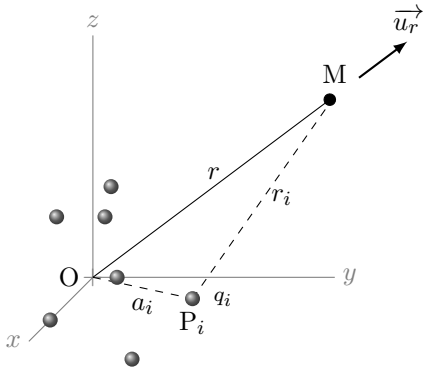
$$V_{\text{dipolaire}} = \frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \heartsuit \tag{3.2}$$

3.1.2 Généralisation

Généralisons le résultat précédent en considérant une distribution localisée de charges. On suppose qu'un ensemble de N charges $(q_1,\ldots,q_N)$ occupe un volume fini. Nous noterons a, la *dimension caractéristique* de cette distribution. Cette distribution peut par exemple modéliser une molécule, un ion complexe, un métal chargé etc. On cherche à calculer les effets électriques (potentiel et champ électrique) dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire pour des points M situés à une distance grande devant a.

Plaçons l'origine O d'un repère dans la distribution puis adoptons les notations suivantes :

- $r = \mathrm{OM}$, la distance entre O et M ;
- $r_i = \mathrm{P}_i\mathrm{M}$ où P_i repère la position de la charge q_i ;
- $a_i = \mathrm{OP}_i$, la distance entre O et P_i.



Le potentiel électrostatique créé en M par la distribution de charges s'écrit

$$V(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

avec

$$r_i = \left\| \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OP_i}} \right\| = r\sqrt{1 + \left(\frac{a_i}{r}\right)^2 - 2\frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\overrightarrow{\mathrm{OP_i}}}{r^2}}$$

Puisque $a_i/r \ll 1$, effectuons un développement limité du potentiel à l'ordre 2 en a_i/r à l'aide de la relation $(1+\epsilon)^{-1/2} = 1 - 1/2\epsilon + 3/8\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$:

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r}\left[1 + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}}{r^2} + \frac{3\left(\overrightarrow{\mathrm{OP_i}}\cdot\overrightarrow{u_r}\right)^2 - {\mathrm{OP_i}}^2}{2r^2} + o\left(\frac{a_i^2}{r^2}\right)\right]$$

Si l'on néglige les termes d'ordre supérieur à 2, on obtient l'approximation suivante :

$$V(M) \simeq \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{(\sum_i q_i \overrightarrow{\mathrm{OP_i}})\cdot\overrightarrow{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\mathcal{Q}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

On voit apparaître des termes décroissant en $1/r^n$. Les trois termes sont les premiers termes de ce que l'on appelle le *développement multipolaire* de $V(\mathrm{M})$:

1. Le premier terme désigne le *terme unipolaire*. C'est le terme prépondérant lorsque la charge totale est non nulle. Par exemple, un ion crée un champ quasi-newtonien dès que l'on se trouve à une distance grande devant sa taille [1].
2. Le deuxième terme représente le *terme dipolaire*. Il devient prépondérant lorsque la charge totale est nulle à condition que $\sum_i q_i \overrightarrow{\mathrm{OP_i}} \neq \overrightarrow{0}$. C'est par exemple le cas d'une molécule neutre qui ne présente pas de centre de symétrie (on parle de molécule polaire), comme par exemple $\mathsf{H_2O}$, HCl, etc.

1. On montre que dans ce cas, si l'on place O au barycentre des charges, le deuxième terme disparaît et le terme suivant varie en $1/r^3$ (terme quadrupolaire).

3. Le troisième terme représente le *terme quadrupolaire*. Il décroit en $1/r^3$ et dépend du moment quadrupolaire $\mathcal{Q} = \sum \frac{1}{2} q_i a_i^2 \left(3\cos^2\theta_i - 1\right)$ qui mesure l'écart à la symétrie sphérique.

On retiendra que pour une distribution électriquement neutre, on définit le moment dipolaire électrique

$$\overrightarrow{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{\mathrm{OP_i}}$$

Si ce moment dipolaire est non nul, le potentiel électrique s'écrit dans l'approximation dipolaire :

$$V_{\text{dipolaire}}(\mathrm{M}) = \frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

3.1.3 Moment dipolaire électrique

La notion de dipôle trouve naturellement sa place dans la description de certaines molécules pour lesquelles le barycentre des charges positives ne coïncide plus avec le barycentre des charges négatives. En effet, supposons une distribution de charges électriquement neutre, contenant N_+ charges positives $\{{q_i}^+\}$ et N_- charges négatives $\{{q_i}^-\}$. L'électroneutralité se traduit par la relation

$$N_+ {q_i}^+ = -N_- {q_i}^- = Q$$

Cette neutralité électrique induit que le moment dipolaire ne dépend pas du choix de l'origine [2]. En effet,

$$\sum_i q_i \overrightarrow{\mathrm{OP_i}} = \sum_i q_i \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \sum_i q_i \overrightarrow{\mathrm{O'P_i}} = \sum_i q_i \overrightarrow{\mathrm{O'P_i}}$$

Notons maintenant B_+ le barycentre des charges positives et B_- celui des charges négatives. Par définition du barycentre, on a

$$Q\overrightarrow{\mathrm{OB_+}} = \sum_{\text{charges }+} {q_i}^+ \overrightarrow{\mathrm{OP_i}} \quad \text{et} \quad -Q\overrightarrow{\mathrm{OB_-}} = \sum_{\text{charges -}} {q_i}^- \overrightarrow{\mathrm{OP_i}}$$

Par conséquent

$$\sum_i q_i \overrightarrow{\mathrm{OP_i}} = \sum_{\text{charges }+} {q_i}^+ \overrightarrow{\mathrm{OP_i}} + \sum_{\text{charges -}} {q_i}^- \overrightarrow{\mathrm{OP_i}} = Q\overrightarrow{\mathrm{OB_+}} - Q\overrightarrow{\mathrm{OB_-}}$$

Ainsi, le moment dipolaire peut se réécrire

$$\overrightarrow{p} = Q\overrightarrow{\mathrm{B_-B_+}} \quad \heartsuit \tag{3.3}$$

Le moment dipolaire est donc lié au fait que le barycentre des charges négatives ne coincide pas avec le barycentre des charges positives. Quand une molécule présente cette propriété on dit qu'elle est polaire (H_20, HCl, NO, etc.) alors que si elle présente un centre de symétrie on dit qu'elle est apolaire (He, N_2, O_2, CO_2, etc.). Le tableau ci-dessous recense quelques exemples d'entités chimiques et le type d'action qu'elles produisent.

Entité chimique	H_20	H_2	$HC\ell$	CO_2	NH_4^+	He	
Charge	0	0	0	0	$\neq 0$	0	
Moment dipolaire	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	0	0	
Moment quadrupolaire	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	
Potentiel à longue distance	$1/r^2$	$1/r^3$	$1/r^2$	$1/r^3$	$1/r$	$1/r^n$	$n \geq 4$

2. Un théorème général stipule que le premier moment multipolaire non nul est indépendant du choix de l'origine (John David Jackson, Christian Jeanmougin et Jean-Pol Vigneron. *Electrodynamique classique : cours et exercices d'électromagnétisme*. Dunod, 2001 p.181).

Ordre de grandeur

Le moment dipolaire s'exprime en C.m dans le Système d'Unités International mais les chimistes préfèrent une unité plus adaptée au monde moléculaire : le debye (symbole : D). Par définition

$$1\text{ D} = 3{,}335\,64.10^{-30}\text{ C.m} \simeq \frac{1}{3}.10^{-29}\text{ C.m}$$

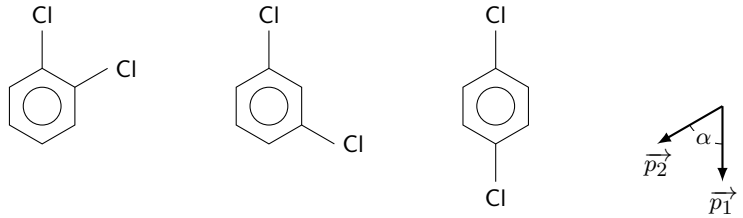
Le tableau ci-dessous donne les moments dipolaires des halogénures d'hydrogène mettant en évidence le phénomène d'électronégativité : l'halogène déplace vers lui le barycentre des charges négatives ce qui induit un moment dipolaire dirigé vers H. Ce phénomène augmente de l'iode vers le fluor, élement le plus électronégatif du tableau périodique.

Halogénure	HF	HCl	HBr	HI
Moment dipolaire	1,97 D	1,03 D	0,78 D	0,38 D

Il est pratique parfois de décomposer un système neutre en N sous-systèmes neutres auxquels on associe un moment dipolaire $\overrightarrow{p_i}$. Dans ce cas, le moment dipolaire de la distribution complète est la somme vectorielle $\overrightarrow{p} = \sum \overrightarrow{p_i}$. C'est pourquoi, on peut calculer le moment dipolaire d'une molécule en sommant vectoriellement les moments dipolaires associées à chaque liaison.

Exemple : **Identification d'un isomère**
L'un des isomères du dichlorobenzène a pour moment dipolaire $p = 1,5$ D. Sachant que la liaison $\mathsf{C}-\mathsf{Cl}$ possède un moment $p_0 = 1,6$ D et que la liaison $\mathsf{C}-\mathsf{H}$ est quasi apolaire, on peut déterminer cet isomère. En effet, le dichlorobenzène existe sous trois formes possibles :

ortho méta para



Si l'on néglige le moment dipolaire des liaison $\mathsf{C}-\mathsf{H}$, alors le moment dipolaire résulte de la somme vectorielle des moments dipolaires associées aux liaisons $\mathsf{C}-\mathsf{Cl}$. Si l'on note α l'angle entre ces liaisons, on a

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} \quad \Longrightarrow \quad p = 2p_0\cos(\alpha/2)$$

On en déduit $\alpha = 124°$, valeur assez proche de 120°. Par conséquent, il s'agit de la forme méta-dichlorobenzène.

3.1.4 Champ électrique dans l'approximation dipolaire

Intéressons au champ électrique créé par une distribution électriquement neutre et présentant un moment dipolaire. Se plaçant dans l'approximation dipolaire, il suffit de calculer l'opposé du gradient [3] du potentiel $V_{\text{dipolaire}}(\text{M})$:

$$\overrightarrow{E}(\text{M}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\text{OM}}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)$$

Utilisons l'identité $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}(g) + g\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ en prenant $g = \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\text{OM}}$ et $f = 1/r^3$:

$$\overrightarrow{E}(\text{M}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\overrightarrow{\text{grad}}\left(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\text{OM}}\right) + (\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\text{OM}})\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

3. D'un point de vue mathématique, la démarche n'est pas rigoureuse. Il faudrait, en principe, calculer directement le champ électrique puis faire tendre r vers l'∞ : on obtient le même résultat.

D'une part,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\text{OM}}\right)=\overrightarrow{\text{grad}}\,(p_x\,x+p_y\,y+p_z\,z)=\overrightarrow{p}$$

d'autre part,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right)=-\frac{3\,\overrightarrow{u_r}}{r^4}$$

On obtient finalement

$$\overrightarrow{E}(\text{M})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[3(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{u_r})\,\overrightarrow{u_r}-\overrightarrow{p}\right]=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix}2p\cos\theta\\ p\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

où la dernière expression est obtenue en orientant le moment dipolaire suivant l'axe (Oz) et en repérant le point M en coordonnées sphériques.

Notons que le champ électrique décroît en $1/r^3$ et qu'il n'est pas isotrope. La Figure 3.1 représente les lignes de champs électriques et les équipotentielles, vues de loin et vues de près.

- On remarque que les lignes de champ présentent deux lobes symétriques perpendiculaires au moment dipolaire. On peut montrer que les lignes de champ ont pour équation paramétrique $r(\theta)=K'\sin^2\theta$.

  > **Remarque** : On serait tenté de conclure que, comme le laisse penser le schéma, les lignes de champ se referment à l'origine. Cependant au voisinage de l'origine, l'approximation dipolaire n'est plus valide. Un examen attentif de ce qui se passe près de l'origine montre que les lignes ne se referment pas : cette propriété est générale en électrostatique.

- Quant au potentiel électrique, la formule (3.2) permet de trouver l'équation paramétrique des équipotentielles : $r=K\sqrt{\cos\theta}$.

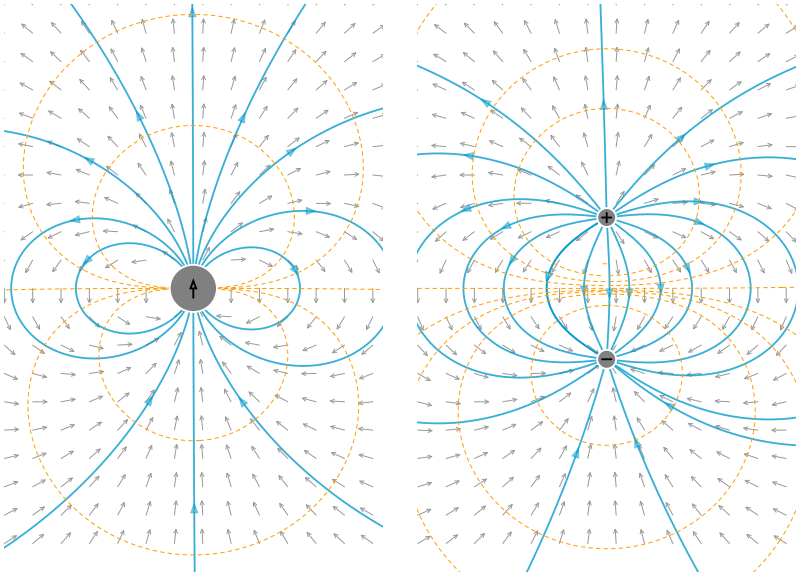


FIGURE 3.1 – Lignes de champ (lignes continues) et équipotentielles (lignes discontinues) créées par un dipôle : dans l'approximation dipolaire et près de l'origine.

3.2 Interactions dipolaires

3.2.1 Énergie d'un dipôle dans un champ électrique extérieur

Supposons un dipôle électrique situé en O et plongeant dans le champ électrique $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$ créé par une autre distribution de charges. Notons $V_{\text{ext}}(x,y,z)$ le potentiel associé. Insistons sur le fait que ces champs sont sans rapport avec les champs produits par le dipôle lui même.

Cherchons à exprimer l'énergie du dipôle $\mathcal{E}_{\text{p}}$ dans l'hypothèse où le champ extérieur varie peu à l'échelle du dipôle. Si l'on adopte un modèle de distribution discrète pour le dipôle, on a

$$\mathcal{E}_{\text{p}} = \sum_i q_i V_{\text{ext}}(x_i, y_i, z_i)$$

où x_i, y_i et z_i sont les coordonnées du point P_i.

> **Remarque** : Il ne faut pas confondre cette énergie avec
>
> $$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \sum_{<i,j>_{i\neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$
>
> qui représente l'énergie interne du dipôle, somme des énergie d'interactions mutuelles entre les charges du dipôle.

Compte tenu des hypothèses, contentons nous d'effectuer un développement du potentiel à l'ordre un, autour de O :

$$V_{\text{ext}}(x_i,y_i,z_i) \simeq V_{\text{ext}}(0,0,0) + x_i\frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial x} + y_i\frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial y} + z_i\frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial z} = V_0 - \overrightarrow{E}_{\text{ext}} \cdot \overrightarrow{\text{OP}_\text{i}}$$

L'expression de l'énergie devient

$$\mathcal{E}_{\text{p}} = \sum_i q_i V_0 - \left(\sum_i q_i \overrightarrow{\text{OP}_\text{i}}\right) \cdot \overrightarrow{E}_{\text{ext}}$$

En vertu de la neutralité électrique du dipôle et de la définition du moment dipolaire, on trouve

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{p}} = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}_{\text{ext}}} \ \heartsuit \tag{3.4}$$

Exercice
On considère une molécule de taille caractéristique a de moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ en interaction avec une charge ponctuelle q_0 située à la distance $r \gg a$ de la molécule. On peut déterminer l'énergie de cette interaction en considérant que la charge est plongée dans un potentiel $V_{\text{dipolaire}}$ ou que la molécule est plongée dans le champ créé par la charge ponctuelle. Déterminer l'énergie d'interaction de ces deux manières et vérifier la cohérence.

Disons que la molécule est en O et la charge en M. Dans la première approche on écrit :

$$\mathcal{E}_{\text{p}} = q_0 V_{\text{dipolaire}} = \frac{q_0\, \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\text{OM}}}{4\pi\epsilon_0\, r^3}$$

Dans la seconde approche, on a

$$\mathcal{E}_{\text{p}} = -\,\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}_{\text{ext}}$$

avec $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$ le champ créé en O par la charge ponctuelle q_0 située en M, soit

$$\overrightarrow{E}_{\text{ext}} = \frac{q_0\, \overrightarrow{MO}}{4\pi\epsilon_0\, r^3}$$

ce qui aboutit bien au même résultat

$$\mathcal{E}_{\text{p}} = \frac{q_0\, \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\text{OM}}}{4\pi\epsilon_0\, r^3}$$

3.2.2 Dipôle rigide dans un champ uniforme

Plongeons une molécule polaire dans un champ électrostatique extérieur *uniforme* $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$. On suppose que cette molécule conserve un moment dipolaire constant : on dit que le dipole est rigide. Quelles sont les actions que subit le dipôle de la part du champ extérieur ?

Commençons par écrire l'énergie d'interaction :

$$\mathcal{E}_{\text{p}} = -\,\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}_{\text{ext}} = -pE_{\text{ext}} \cos\theta$$

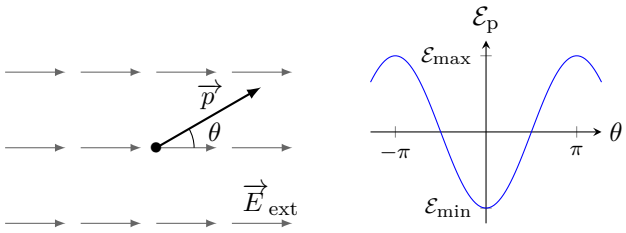


FIGURE 3.2 – Dipôle rigide dans un champ uniforme.

Notons tout d'abord que l'énergie ne dépend pas de la position du dipôle. Cette invariance par translation se traduit par une résultante des forces nulles. On peut le vérifier en calculant directement la force électrique :

$$\overrightarrow{F} = \sum_i q_i \overrightarrow{E}_{\text{ext}} = \overrightarrow{E}_{\text{ext}} \sum_i q_i = \overrightarrow{0}$$

Ainsi la molécule n'est pas accélérée. En revanche, elle est soumise à un couple qui tend à la faire tourner. D'après le profil de l'énergie potentielle, on voit que le système va chercher à adopter la configuration la plus stable, c'est-à-dire celle correspondant à un alignement du dipôle avec le

champ extérieur ($\theta = 0$). On peut calculer le moment de ce couple d'orientation :

$$\overrightarrow{\Gamma} = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{OP_i}} \wedge q_i \overrightarrow{E}_{\mathrm{ext}} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_{\mathrm{ext}}$$

moment qui tend à aligner le dipôle avec le champ électrique [4]. Ainsi, l'action d'un champ électrique uniforme consiste en une orientation du moment dipolaire suivant le champ électrique.

> **Exemple** : Lorsque l'on dissout un ion en solution aqueuse, les molécules d'eau entourent l'ion en orientant le moment dipolaire de la molécule d'eau dans le sens du champ créé par l'ion. Ce processus permet d'atténuer efficacement le champ électrique créé par l'ion.

3.2.3 Dipôle rigide dans un champ non uniforme

Supposons maintenant que le champ ne soit plus uniforme et admettons que le processus d'orientation du moment dipolaire suivant le champ électrique soit réalisé à tout instant. Dans ce cas, l'énergie du dipole s'écrit $\mathcal{E}_{\mathrm{p}} = -pE_{\mathrm{ext}}$. Les actions qui apparaissent font en sorte de diminuer cette énergie : autrement dit, le dipôle est soumis à une force qui tend à le déplacer dans la zone ou règne le champ le plus fort. Mathématiquement, on a

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_{\mathrm{p}} = p\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_{\mathrm{ext}}$$

Un dipôle rigide dans un champ non uniforme est soumis à une force qui tend à le déplacer vers les zones où règne un champ électrique fort (une fois le dipôle aligné avec le champ).

C'est ce qui explique par exemple qu'un baton d'ébonite frotté (et donc chargé) attire des morceaux de papier (isolants neutres). En effet, le baton crée un champ électrique qui polarise le morceau de papier, lequel acquiert un moment dipolaire forcément orienté avec le champ électrique. Ce champ étant plus intense près de l'extrémité du baton, le morceau de papier va venir se coller au baton.

3.2.4 Interactions de van der Waals

Au sein de la matière, les molécules, bien qu'électriquement neutres, sont soumises à de faibles interactions attractives que l'on désigne par *interactions de van der Waals* [5]. Ces interactions jouent un rôle important dans la science du vivant, en chimie et en physique des interfaces. Elles sont par exemple responsables de la cohésion des cristaux liquides et moléculaires. Les phénomènes de tension de surface reposent également sur cette force. On peut interpréter l'interaction de van der Waals comme le résultat d'une interaction entre dipôles dont l'énergie d'interaction se décompose en trois termes :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{vdW}} = \mathcal{E}_{\mathrm{Keesom}} + \mathcal{E}_{\mathrm{Debye}} + \mathcal{E}_{\mathrm{London}}$$

Terme de Keesom : deux molécules polaires de moment dipolaire p_1 et p_2 auront tendance à orienter leur moment dipolaire dans le sens du champ produit par l'autre dipôle puis à se rapprocher du fait de l'attraction vers les champs forts. Du fait de l'agitation thermique, il faut moyenner cette interaction sur toutes les orientations posibles. On montre alors que l'énergie d'interaction moyenne entre deux dipôles permanents distants de r s'écrit

$$\mathcal{E}_{\mathrm{Keesom}} = -\frac{{p_1}^2{p_2}^2}{k_B T(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{1}{r^6}$$

4. Mathématiquement le couple est nul lorsque le dipôle est antiparallèle avec le champ électrique. Cependant, on peut voir sur le profil énergétique que cette configuration n'est pas stable : une seule perturbation angulaire suffit à faire apparaître un couple qui tend à éloigner le dipôle de cette configuration.

5. Nommées ainsi en l'honneur du physicien néerlandais Johannes Diderik van der Waals (1837 — 1923), prix Nobel de physique 1910, qui fut le premier à introduire leurs effets dans les équations d'état des gaz en 1873.

Terme de Debye : il s'agit de l'interaction d'une molécule polaire avec une molécule apolaire, comme par exemple l'interaction entre H_2O et O_2. La molécule apolaire ne présente pas de moment dipolaire en raison de l'existence d'un centre de symétrie, cependant, en présence d'un champ électrique, le nuage électronique se déforme ce qui déplace le barycentre des charges négatives et induit l'apparition d'un moment dipolaire : on dit que la molécule s'est polarisée. Le moment dipolaire induit est proportionnel au champ électrique extérieur :

$$\overrightarrow{p}_{\text{induit}} = \epsilon_0 \alpha \overrightarrow{E}_{\text{ext}}$$

où α désigne la **polarisabilité**. Ainsi, en présence d'un dipôle permanent, une molécule apolaire se polarise et a tendance à s'orienter suivant le champ polarisant puis à se rapprocher de la molécule responsable de cette polarisation. On trouve une énergie d'interaction

$$\mathcal{E}_{\text{Debye}} = -\frac{{p_1}^2 \alpha}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^6}$$

Force de London : on pourrait penser que deux atomes apolaires (comme les gaz rares) ou deux molécules apolaires (comme O_2) n'interagissent pas puisqu'ils ne présentent pas de moment dipolaire. En réalité, chaque molécule présente un moment dipolaire fluctuant $p(t)$ de moyenne nulle : $\overline{\overrightarrow{p}(t)} = \overrightarrow{0}$. Le terme d'interaction est alors proportionnel à la moyenne $\overline{p^2}$ qui elle n'est pas nulle. On montre que le terme d'interaction varie également comme $1/r^6$.

Forces de van der Waals
En résumé, dans la matière il existe des interactions attractives entre toutes les molécules. L'énergie d'interaction s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{vdW}} = -\frac{C}{r^6}$$

ce qui donne naissance à une force moyenne attractive

$$\overrightarrow{F}_{\text{VDW}} = -\frac{6C}{r^7} \overrightarrow{u_r}$$

La décroissance rapide de la force de van der Waals permet d'expliquer sa courte portée et son influence dans les milieux denses (liquide et solide).

Bien entendu, les molécules finissent par se repousser lorsqu'elles sont en contact proche du fait de la répulsion électronique et du principe d'exclusion de Pauli. Cette effet stérique est en général décrit par un terme d'énergie répulsif en $1/r^{12}$. Un modèle très souvent utilisé en dynamique moléculaire pour sa simplicité, est le modèle de Lennard-Jones :

$$\mathcal{E}_{\text{p}}(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{a}{r}\right)^{6} \right]$$

où ϵ représente la profondeur du puits de potentiel et a la position correspondant à une énergie nulle (*cf.* figure ci-contre). La profondeur du puits est de l'ordre du kJ/mol ce qui explique l'existence de cristaux moléculaires, à basse température.

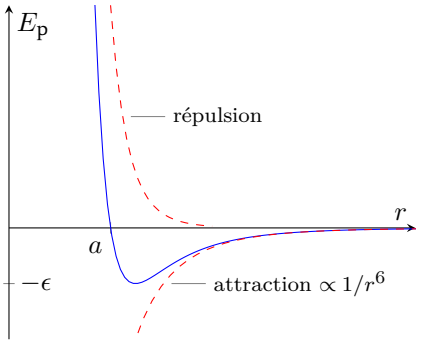


FIGURE 3.3 – Potentiel de Lennard-Jones

4 – CONDUCTEURS ÉLECTRIQUES

Ce cours aborde les propriétés électriques des conducteurs, aussi bien à l'équilibre que hors équilibre (phénomène de conduction). Ce sera l'occasion d'introduire les notions de capacité d'un condensateur et de résistance d'un conducteur ohmique utiles en électricité.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

http://femto-physique.fr/electromagnetisme/conducteurs_electriques.php

Sommaire

4.1 Conduction électrique 32
4.1.1 Courant électrique 32
4.1.2 Loi d'Ohm locale 33
4.1.3 Modèle de Drude 34
4.1.4 Notion de résistance 35
4.2 Conducteurs en équilibre électrostatique 35
4.2.1 Propriétés des conducteurs en équilibre 36
4.2.2 Théorème de Coulomb 36
4.2.3 Le théorème de Gauss et ses conséquences 37
4.3 Notion de capacité 39
4.3.1 Capacité d'un conducteur 39
4.3.2 Les condensateurs 41
4.3.3 Capacité d'un condensateur plan 41
4.3.4 Énergie stockée par un condensateur 43

4.1 Conduction électrique

Un conducteur est un système macroscopique qui contient des porteurs de charge libres, susceptibles de se mettre en mouvement sous l'action d'une force extérieure.

Conducteur	**Porteurs de charge libres**
Métal (Cu, Ag, Au, Al, ...)	Électrons libres délocalisés
Semi conducteur dopé (Si, AsGa, ...)	Paires électron - trou
Solution électrolytique (KOH_{aq}, $NaCl_{aq}$,...)	Ions dissous
Plasma (gaz ionisé)	Protons, électrons

4.1.1 Courant électrique

Définition
Le courant électrique est le résultat d'un *déplacement d'ensemble* de particules chargées. Son intensité I est donnée par le flux (ou le débit) de charge qui traverse une section (S). Plus précisément, la quantité de charge $\mathrm{d}q$ qui passe au travers de (S) entre t et $t+\mathrm{d}t$ vaut

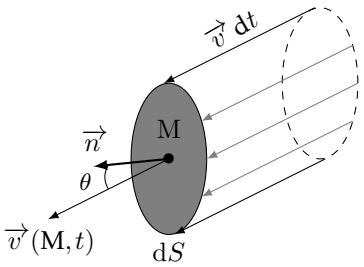
$$\mathrm{d}q = I(t)\,\mathrm{d}t$$

L'intensité électrique s'exprime en **ampère** (symbole : A) en hommage à André-Marie Ampère. On a donc $1\ \mathrm{A} = 1\ \mathrm{C.s^{-1}}$

On peut exprimer l'intensité du courant électrique en fonction des caractéristiques de l'écoulement des porteurs de charge, à savoir leur vitesse moyenne et leur densité volumique. Pour simplifier la démonstration, supposons un seul type de porteurs se déplaçant tous à la vitesse moyenne v. Notons ρ leur densité volumique de charge (en $\mathrm{C.m^{-3}}$). Considérons une section (S) orientée par la normale $\overrightarrow{n}$ et calculons la quantité de charge la traversant pendant une durée $\mathrm{d}t$.

Tous les porteurs de charge qui traversent l'élément infinitésimal $\mathrm{d}S$ de la section à l'instant $t+\mathrm{d}t$, se trouvaient entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ dans un cylindre de base $\mathrm{d}S$ et de génératrice $\overrightarrow{v}\mathrm{d}t$, dont le volume s'écrit $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}S\,\mathrm{d}t\,\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}$. Ainsi, la quantité de charge d^2q qui traverse la section $\mathrm{d}S$ entre t et $t+\mathrm{d}t$ vaut $\mathrm{d}^2q = \rho\,\mathrm{d}\tau$. En intégrant sur toute la section, on trouve

$$\mathrm{d}q = \mathrm{d}t \iint_{(S)} \rho\,\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S$$



Mathématiquement, l'intensité s'interprète donc comme le flux d'un vecteur $\overrightarrow{j} = \rho\,\overrightarrow{v}$ appelé **densité de courant électrique** :

$$\begin{array}{rcl} I(t) & = & \displaystyle\iint_{(S)} \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}\,\mathrm{dS} \\ [\mathrm{A}] & = & \left[\mathrm{A.m^{-2}}\right] \times \left[\mathrm{m^2}\right] \end{array} \quad \heartsuit \tag{4.1}$$

Si le courant est réparti uniformément, le vecteur densité de courant est constant sur la section S et l'intégrale se réduit à :

$$I = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}\,S$$

Dans le cas où plusieurs porteurs de charge transportent le courant il faut sommer toutes les contributions :

$$\overrightarrow{j} = \sum_i \rho_i\,\overrightarrow{v_i}$$

Arrêtons nous un instant sur les ordres de grandeur. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs d'intensité que l'on rencontre dans le quotidien.

Ordre de grandeur	**Phénomène**
1 mA	seuil de perception chez l'humain
75 mA	seuil de fibrilisation cardiaque irréversible
1A	fonctionnement d'une lampe halogène
10 A	radiateur électrique en fonctionnement
1 kA	alimentation d'un moteur de locomotive
1-100 kA	courant de foudre

TABLE 4.1 – Quelques ordres de grandeur

Essayons d'estimer la vitesse des porteurs de charge dans une installation domestique. Par exemple, un fil de cuivre de section $s = 2{,}5$ mm^2 supporte un courant d'intensité $I_{\max} = 20$ A (normes françaises). La densité de courant correspondante vaut

$$j = \frac{I_{\max}}{s} = 8.10^6 \text{ A.m}^{-2}$$

Le cuivre a pour densité $d = 8{,}96$ et une masse atomique $m = 63{,}5$ u.a. De plus, chaque atome de cuivre libère un électron libre. Ainsi, 1 m^3 pèse $8{,}96.10^3$ kg ce qui correspond à $8{,}96.10^3/63{,}5.10^{-3}$ mole de cuivre. La densité volumique des porteurs de charge vaut donc

$$\rho = \frac{8,96.10^3}{63,5.10^{-3}} \times 6,02.10^{23} \times 1,6.10^{-19} = 1,4.10^{10} \text{ C.m}^{-3}$$

la vitesse moyenne des électrons est alors donnée par $v = j/\rho = 0{,}6\,\text{mm.s}^{-1}$. La vitesse moyenne correspondant au transport de l'électricité est très faible devant la vitesse d'agitation thermique qui est de l'ordre de 10^5 m.s^{-1}. On peut aussi noter que si le fil est traversé par un courant alternatif de fréquence $f = 50$ Hz et d'intensité maximum 20 A, le déplacement moyen des électrons libres oscillera avec une amplitude

$$A = \frac{v}{2\pi f} = \frac{6.10^{-4}}{100 \times \pi} \simeq 2\,\mu\text{m}$$

4.1.2 Loi d'Ohm locale

Un conducteur soumis à un champ électrique $\overrightarrow{E}$ est le siège d'un courant électrique de densité de courant

$$\boxed{\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E}} \ \heartsuit \tag{4.2}$$

où γ désigne la conductivité électrique et s'exprime en siemens par mètre (S.m^{-1}). Elle dépend du conducteur, de la température et de la pression. Par exemple, dans les métaux, γ diminue quand la température augmente. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de conductivités à 20°C. Notez le rapport d'échelle entre les isolants et les conducteurs.

Bons conducteurs		**Mauvais conducteurs**		**Isolants**	
Substance	γ (S.m^{-1})	Substance	γ (S.m^{-1})	Substance	γ (S.m^{-1})
Argent	$6,1.10^7$	Eau de mer	0,2	Huile minérale	2.10^{-11}
Cuivre	$5,8.10^7$	Silicium	$4,3.10^{-4}$	Verre Pyrex	10^{-15}
Or	$4,5.10^7$	Eau distillée	2.10^{-4}	Quartz	2.10^{-17}

4.1.3 Modèle de Drude

En 1900, Paul Drude propose un modèle classique qui explique qualitativement la conduction électrique. Ce modèle repose sur les hypothèses suivantes.

1. Approximation des électrons libres : les électrons de conduction forment un *gaz parfait de particules chargées indépendantes* (malgré la présence des ions métalliques). En l'absence de champ extérieur, ces électrons libres ne ressentent aucune force en moyenne et se déplacent en ligne droite du fait de l'agitation thermique.
2. Les électrons sont diffusés par les défauts cristallins. Après chaque collision, la vitesse est redistribuée de façon aléatoire.
3. Le temps de libre parcours moyen ou temps de relaxation τ est la durée moyenne entre 2 collisions. τ est indépendant de la vitesse des électrons. Son ordre de grandeur est 10^{-14} s.

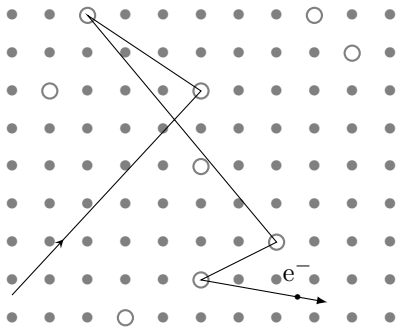


FIGURE 4.1 – Modèle de Drude

Dans ce modèle, entre deux collisions, la vitesse d'un électron soumis à un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E}$, vérifie la seconde loi de Newton (modèle classique) :

$$m_e \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -e\overrightarrow{E} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{v} = -\frac{e\overrightarrow{E}}{m_e}t + \overrightarrow{v_0}$$

où $\overrightarrow{v_0}$ désigne la vitesse après la dernière collision et t le temps compté à partir de la dernière collision. Le courant étant lié au mouvement d'ensemble, il faut effectuer une moyenne sur l'ensemble des électrons au même instant.

$$\overrightarrow{v}_{\text{moy}} = -\frac{e\overrightarrow{E}}{m_e}\langle t\rangle + \langle \overrightarrow{v_0}\rangle$$

Or, la vitesse étant redistribuée dans toutes les directions après chaque collision, ceci de façon aléatoire, on a $\langle \overrightarrow{v_0}\rangle = \overrightarrow{0}$. De plus, la moyenne $\langle t\rangle$ correspond à la moyenne des temps de collision c'est-à-dire τ. Finalement, on obtient une vitesse d'ensemble

$$\overrightarrow{v}_{\text{moy}} = -\frac{e\tau}{m_e}\overrightarrow{E}$$

La vitesse d'ensemble est proportionnelle au champ électrique. Le coefficient de proportionnalité s'appelle *la mobilité* μ :

$$\overrightarrow{v}_{\text{moy}} = \mu\overrightarrow{E}$$

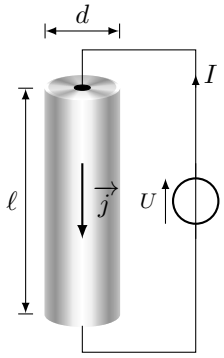
Si l'on note n la densité d'électrons libres (en m^{-3}), on voit que le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique et s'écrit $\overrightarrow{j} = ne\overrightarrow{v}_{\text{moy}} = \frac{ne^2\tau}{m_e}\overrightarrow{E}$. On retrouve donc la loi d'Ohm locale

$$\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{ne^2\tau}{m_e}$$

Ce modèle permet d'expliquer, par exemple, pourquoi la conductivité des métaux diminue quand la température augmente. En effet, lorsque l'on chauffe un métal, les vibrations du réseau s'amplifient ce qui augmente la probabilité qu'il y ait collision et donc diminue le temps de relaxation.

4.1.4 Notion de résistance

Pour introduire la notion de résistance d'un conducteur, considérons un cylindre conducteur le longueur ℓ, de diamètre d et donc de section droite $s = \pi d^2/4$, soumis à une tension électrique U entre ses extrémités.



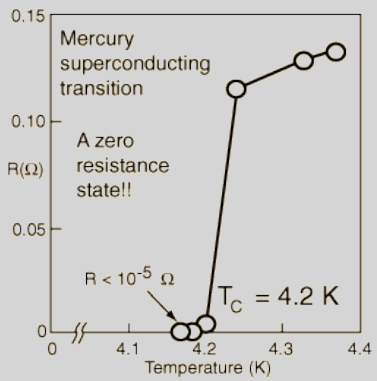
Faisons l'hypothèse que le courant électrique est uniforme sur la section et axial. La section étant constante, la densité de courant est constante le long du cylindre. De plus, la relation $j = \gamma E$ implique que le champ électrique est axial et constant le long du conducteur. L'intensité électrique vaut alors $I = js = \gamma E s$ et la tension électrique entre les extrémités vaut $U = \int E \, \mathrm{d}\ell = E\ell$. Le rapport des deux relations permet d'obtenir la loi d'Ohm pour un fil conducteur cylindrique :

$$U = RI \quad \text{avec} \quad R = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{s} \quad \heartsuit \tag{4.3}$$

De manière générale, la loi $U = RI$ constitue la *loi d'Ohm intégrale* et R désigne la résistance du conducteur dont l'expression dépend de la conductivité **et** de la géométrie. La résistance s'exprime en ohm (symbole Ω) en hommage à Georg Ohm.

> **Application**
> L'inverse de la conductivité d'un métal, appelée résistivité, varie linéairement avec la température ($\frac{1}{\gamma} = \rho_0 + \alpha T$) de telle sorte que la résistance peut servir de thermomètre une fois étalonné. Le fil de platine est couramment utilisé ainsi : on parle de thermomètre à resistance de Platine.

Supraconduction
En 1911, Kamerlingh Onnes (Prix Nobel 1913), découvre le phénomène de supraconduction sur le mercure : en dessous d'une certaine température, dite température critique et notée T_c, certains métaux perdent complètement leur résistivité [a]. La supraconduction ouvre des perspectives de transport de l'électricité sans perte d'énergie (voir effet joule en électricité) à condition de trouver un supraconducteur de température critique située dans le domaine de température ambiante.
Depuis 1911, ce phénomène fut découvert dans de nombreux métaux et alliages avec des records de température critique qui progressèrent doucement. Un grand saut fut fait en 1986 avec la découverte d'une nouvelle famille de supraconducteurs : les cuprates, composés de couches d'oxyde de cuivre. Récemment, la barre des -100°C a été franchie puisqu'un matériau à base de sulfure d'hydrogène a conservé sa supraconductivité jusqu'à -73°C. Il reste donc encore du chemin à parcourir avant de trouver un matériau supraconducteur à température ambiante.



a. R. de Bruyn Ouboter. "Kamerlingh Onnes découvre la supraconduction". In : *Pour la science* 235 (1997).

4.2 Conducteurs en équilibre électrostatique

On s'interesse dorénavant à l'équilibre de conducteurs électrisés (chargés) placés dans le vide.

4.2.1 Propriétés des conducteurs en équilibre

À l'équilibre, un conducteur n'est soumis à aucun mouvement macroscopique. Notamment, Il n'y a pas de courant électrique macroscopique. Par conséquent,

$$\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$$

Bien évidemment, à l'échelle de l'atome les électrons sont en mouvement, mais à l'échelle mésoscopique [1] ces mouvements incessants se compensent en moyenne. Donc, selon la loi d'Ohm, il ne règne aucun champ électrique au sein du conducteur :

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{\text{int}} = \overrightarrow{0}} \ \heartsuit \tag{4.4}$$

Insistons sur le fait qu'il s'agit ici du champ électrique local moyenné à l'échelle mésoscopique. Bien entendu, à l'échelle de l'atome, règne un champ électrique extrêmement important et fluctuant.

À l'intérieur du conducteur, le potentiel doit vérifier $\overrightarrow{E_{\text{int}}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_{\text{int}} = \overrightarrow{0}$ soit

$$\boxed{V_{\text{int}} = \text{C}^{\text{te}}} \ \heartsuit \tag{4.5}$$

Le potentiel électrique est uniforme au sein du conducteur à l'équilibre. Autrement dit, **le conducteur à l'équilibre est un volume équipotentiel**. Les lignes de champ électrique étant perpendiculaires aux équipotentielles, on voit ici que le champ électrique au voisinage extérieur du conducteur est normal à la surface.

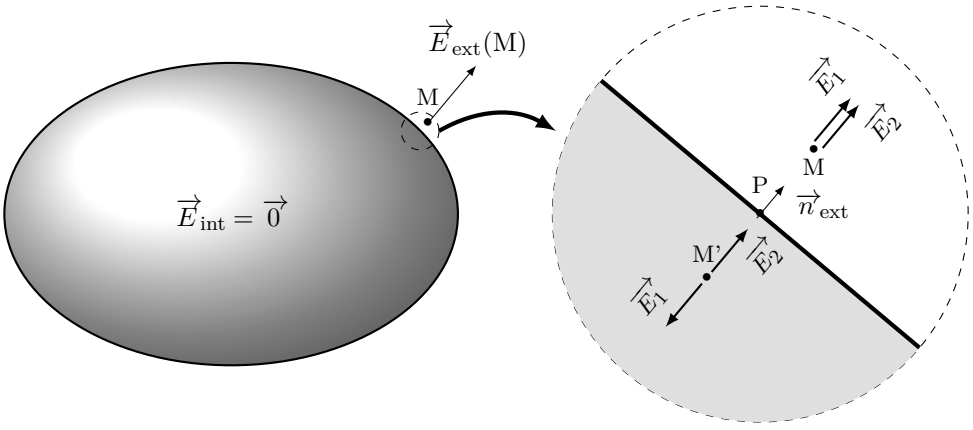
En vertu du théorème de Gauss, que nous verrons ultérieurement, le fait que le champ électrique soit nul à l'intérieur du conducteur implique que la densité de charge volumique est nulle partout.

$$\boxed{\rho_{\text{int}} = 0} \ \heartsuit \tag{4.6}$$

Cela signifie que tout apport de charge à un conducteur va se répartir à la surface de celle-ci de façon à créer un champ électrique nul à l'intérieur. On caractérise alors le conducteur par sa distribution de charge surfacique $\sigma(\text{P})$ où P désigne un point de la surface du conducteur. Le champ électrique à la surface du conducteur dépend donc de la manière dont se répartissent les charges en surface.

4.2.2 Théorème de Coulomb

Plaçons nous à l'extérieur d'un conducteur à l'équilibre tout en restant dans le voisinage immédiat d'un point P de sa surface. Dans ce cas, le champ électrique produit ne dépend que de la densité surfacique en ce point. C'est ce que montre le théorème de Coulomb.



1. Échelle intermédiaire entre l'échelle atomique et macroscopique. Typiquement c'est l'échelle du micromètre.

Pour le montrer, plaçons-nous en un point M au voisinage d'un conducteur. On peut considérer que le champ créé en M est le résultat de deux contributions :

$$\overrightarrow{E}_{\text{ext}}(\text{M}) = \overrightarrow{E_1}(\text{M}) + \overrightarrow{E_2}(\text{M})$$

où $\overrightarrow{E_1}$ est le champ créé par une portion de conducteur suffisamment petite pour qu'on puisse l'assimiler à un plan tangent, et $\overrightarrow{E_2}$ celui dû au reste du conducteur. On a vu qu'un plan infini uniformément chargé produit un champ électrique $\overrightarrow{E} = \sigma/2\epsilon_0\,\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal au plan. Ce résultat reste valide pour un plan fini de taille caractéristique L tant que l'on se place à une distance $d \ll L$ du plan. Supposons donc M suffisamment proche du conducteur pour autoriser cette approximation puis notons $\overrightarrow{n}_{\text{ext}}$ le vecteur unitaire normal à la surface du conducteur et dirigé vers l'extérieur. On a donc

$$\overrightarrow{E}_{\text{ext}}(\text{M}) = \frac{\sigma(\text{P})}{2\epsilon_0}\,\overrightarrow{n}_{\text{ext}} + \overrightarrow{E_2}(\text{M})$$

Par ailleurs, si l'on considère le point M' symétrique de M par la symétrie plane passant par P, on a également

$$\overrightarrow{E}_{\text{int}}(\text{M'}) = -\frac{\sigma(\text{P})}{2\epsilon_0}\,\overrightarrow{n}_{\text{ext}} + \overrightarrow{E_2}(\text{M'})$$

Nous savons qu'à l'intérieur du conducteur le champ électrique est nul ce qui implique $\overrightarrow{E_2}(\text{M'}) = \sigma(\text{P})/\epsilon_0\,\overrightarrow{n}_{\text{ext}}$. Or, par continuité, $\overrightarrow{E_2}(\text{M'}) = \overrightarrow{E_2}(\text{M})$ puisque M et M' sont infiniment voisins[2]. Finalement, on trouve $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}(\text{M}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\overrightarrow{n}_{\text{ext}}$.

Théorème de Coulomb
Dans un conducteur à l'équilibre, le champ électrique intérieur est nul, le potentiel électrique est uniforme et les charges se répartissent à la surface du conducteur. Il règne alors au voisinage immédiat de la surface chargée (et à l'extérieur) un champ électrique :

$$\overrightarrow{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma(\text{P})}{\epsilon_0}\,\overrightarrow{n}_{\text{ext}}$$

4.2.3 Le théorème de Gauss et ses conséquences

Le théorème de Gauss est un théorème très général qui relie le flux électrique et la quantité de charge électrique.

Par définition, le flux du champ électrique $\overrightarrow{E}$ à travers une *surface fermée* $(\mathcal{S})$ vaut

$$\Phi \equiv \iint_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{E}(\text{M}) \cdot \overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S \quad \heartsuit \tag{4.7}$$

où $\overrightarrow{n}$ désigne un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface en M et dirigé vers l'*extérieur*.

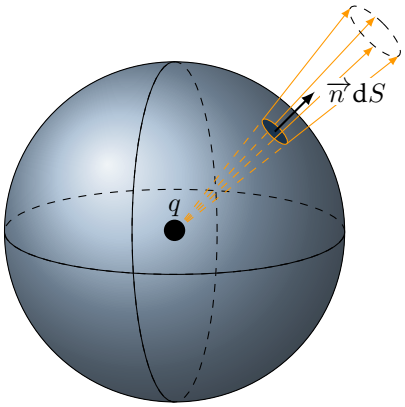
Pour introduire le théorème de Gauss, calculons le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle, à travers une sphère de rayon r centrée sur la charge. Le champ électrique en un point M de la surface sphérique vaut

$$\overrightarrow{E}(\text{M}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\overrightarrow{u_r}$$

2. Pour être précis, on montre que le champ électrique est continu sauf si le trajet MM' coupe une distribution surfacique de charge, ce qui n'est pas le cas ici, car on s'interesse au champ créé par la surface conductrice à laquelle on a retiré la portion contenant P.

où $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire du système sphérique. La normale à la surface est également suivant $\overrightarrow{u_r}$ de sorte que le flux s'écrit

$$\Phi = \iint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_r}\,\mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\iint \mathrm{d}S = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Autrement dit, le flux est proportionnel à la quantité de charge enfermée par la sphère mais ne dépend pas de la taille de la sphère. On peut se demander ce que devient le flux lorsque la surface qui enferme la charge n'est plus sphérique. On trouve un résultat surprenant puisque le flux reste identique : tant que la surface englobe la charge, $\Phi = q/\epsilon_0$. En revanche, si la surface n'englobe pas la charge, on obtient toujours $\Phi = 0$.

Si maintenant on envisage une distribution quelconque de charges et une surface fermée $\mathcal{S}$ englobant une partie des charges, seule la quantité de charge q_{int} intérieure à $\mathcal{S}$ contribue au flux : c'est le sens du théorème de Gauss.

Théorème de Gauss
Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée quelconque, est proportionnel à la quantité de charge enfermée par cette surface. La constante de proportionnalité vaut, dans le Système International, $\frac{1}{\epsilon_0}$.

$$\Phi = \iint_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{E}(\mathrm{M})\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \tag{4.8}$$

On peut vérifier que le théorème de Gauss est bien compatible avec le théorème de Coulomb. Imaginons que la surface $(\mathcal{S})$ englobe un conducteur quelconque de charge totale q de façon à ce qu'elle soit infiniment proche de la surface du conducteur. D'après le théorème de Coulomb, $E = \sigma(\mathrm{P})/\epsilon_0\,\overrightarrow{n}$ de sorte que

$$\phi = \iint \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\epsilon_0}\iint_{\mathrm{P}\in(\mathcal{S})}\sigma(\mathrm{P})\,\mathrm{d}S = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ce qui est bien conforme au théorème de Gauss.

Quelques Conséquences

1. Isolons par la pensée un petit volume (V) situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre. Le champ électrique y étant nul, son flux à travers la surface qui délimite (V) est également nul. Par conséquent, la charge intérieure au volume est nulle. Ainsi, on peut affirmer que tout volume (mésoscopique) contient une charge nulle, ce qui revient à dire que la densité volumique de charge est partout nulle, à l'intérieur d'un conducteur ; ce qui démontre une des propriétés des conducteurs à l'équilibre.

2. Considérons maintenant une sphère conductrice chargée (charge q) de rayon R. Par symétrie, la charge se répartie uniformément en surface d'où une densité surfacique constante $\sigma = q/(4\pi R^2)$. On connait le champ électrique au voisinage de la sphère, mais que vaut-il à une distance r quelconque ? Pour cela il suffit d'appliquer le théorème de Gauss en choisissant pour surface fermée $(\mathcal{S})$ la sphère de rayon r et même centre que le conducteur. On a

$$\phi = \iint_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n}\, \mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} E\, \mathrm{d}S$$

car $\overrightarrow{E}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_r}$ compte tenu de la symétrie sphérique. Par ailleurs, l'invariance par rotation implique que le champ ne dépend que de r. Ainsi, E est constant le long de la surface sphérique d'intégration. Il vient alors

$$\phi = \iint_{(\mathcal{S})} E\, \mathrm{d}S = E \iint_{(\mathcal{S})} \mathrm{d}S = E\, 4\pi\, r^2$$

Du théorème de Gauss, il découle donc

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\, \overrightarrow{u_r} \quad \text{si} \quad r > R$$

Autrement dit, une boule conductrice de charge q produit à l'extérieur le même champ qu'une charge ponctuelle q située en son centre.

3. Supposons maintenant un conducteur enfermant une cavité dans laquelle se trouve une charge ponctuelle q. Le caractère ponctuelle n'a pas d'importance ici ; il pourrait très bien s'agir d'un petit volume quelconque chargé. Cette charge a pour effet d'attirer ou de repousser (ça dépend de son signe) les électrons libres du conducteur de sorte que la surface interne du conducteur présente une distribution de charge q'. Pour trouver q', il suffit d'utiliser le théorème de Gauss en choisissant une surface fermée entourant la cavité et située dans le conducteur. Puisqu'en tout point de la surface de Gauss le champ électrique est nul, alors le flux électrique l'est également. Par conséquent, en vertu du théorème de Gauss, $q' + q = 0$: la surface interne se remplit d'une charge opposée ; c'est ce qu'on appelle l'influence totale.
4. Si maintenant on retire la charge q, dans ce cas $q' = 0$. Il est facile de montrer que la densité de charge est partout nulle sur la surface interne du conducteur. En effet, si la surface interne présente une distribution de charge alors elle contient des charges + et - (puisque $q' = 0$). Les lignes de champ partiraient alors des charges + pour rejoindre les charges - (elles ne peuvent pas s'arrêter dans la cavité puisqu'il n y a pas de charges). Dans ce cas, on aurait des lignes de champ qui partiraient d'un point porté au même potentiel que le point d'arrivée. Or, par nature ($\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$), une ligne de champ ne peut visiter que des points de potentiel décroissant, ce qui infirme l'hypothèse de départ. Finalement, dans une cavité vide de charge, la surface interne est également vide de charge ce qui implique un champ nul et un potentiel constant et égal à celui du conducteur. Cela signifie par exemple que tout perturbation électrique produite à l'extérieure du conducteur n'a strictmeent aucune action à l'intérieur de la cavité : c'est l'effet « cage de faraday ».

4.3 Notion de capacité

4.3.1 Capacité d'un conducteur

Portons un conducteur $\mathcal{C}$ au potentiel V_0 et notons la charge Q_0 qui se répartit en surface. Ce conducteur produit à l'extérieur un potentiel

$$V(\mathrm{M}) = \iint \frac{\sigma\, \mathrm{d}S}{4\pi\epsilon_0\, r}$$

en prenant comme convention $V(\infty) = 0$. Les charges se répartissent donc de façon à ce que $V(\mathrm{M}) = V_0$ pour tout point $\mathrm{M} \in \mathcal{C}$.

Définissons maintenant un potentiel $V'(\mathrm{M}) = \lambda V(\mathrm{M})$ avec λ un nombre réel. Ce potentiel vérifie la condition aux limites $V'(\mathrm{M} \in \mathcal{C}) = \lambda V_0$. C'est donc le potentiel produit par le conducteur mis au potentiel $V_0' = \lambda V_0$. Notons σ' la nouvele distribution de charges. On a

$$V'(\mathrm{M}) = \iint \frac{\sigma' \,\mathrm{d}S}{4\pi\epsilon_0 r} = \lambda V(\mathrm{M}) = \lambda \iint \frac{\sigma \,\mathrm{d}S}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \forall M$$

ce qui implique que

$$\sigma' = \lambda\sigma \quad \text{soit} \quad Q_0' = \lambda Q_0$$

Autrement dit, le rapport

$$\frac{Q_0'}{V_0'} = \frac{Q_0}{V_0} = C > 0$$

est une constante caractéristique de la géométrie du conducteur. C désigne la capacité du conducteur seul. Elle mesure la capacité d'un conducteur à stocker une quantité de charge sous un potentiel électrique donné. La capacité se mesure en **farad** (F) en hommage à Faraday [a].

a. **Michael Faraday (1791 - 1867)** : physicien et chimiste anglais. En 1831, il découvre l'induction électromagnétique qui permettra la construction des dynamos. En 1833, il établit la théorie de l'électrolyse. Il travailla également sur le phénomène d'électroluminescence, le diamagnétisme et l'action d'un champ magnétique sur la lumière polarisée.

Exemple : Capacité d'un conducteur sphérique de rayon R

Lorsque l'on porte un conducteur sphérique au potentiel V_0, du fait de la symétrie sphérique, les charges se répartissent de façon uniforme : σ est constant. Le potentiel électrique V_c produit au centre de la boule se calcule aisément :

$$V_c = \iint \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R}$$

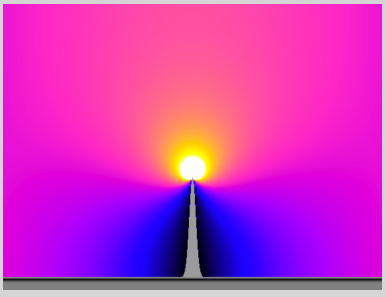
La capacité d'un conducteur sphérique s'écrit donc

$$C = \frac{Q_0}{V_0} = \frac{Q_0}{V_c} = 4\pi\epsilon_0 R$$

La capacité d'une boule conductrice est proportionnelle à son rayon. Notez que si l'on prend un conducteur sphérique de rayon égal au rayon de la Terre, on trouve une capacité $C = 0,7\,\mathrm{mF}$, ce qui montre que le farad n'est pas une unité très adaptée ; aussi utilise-t-on ses sous multiples.

Effet de pointe

Lorsqu'on soumet un conducteur à un potentiel V, les charges ne se répartissent pas toujours uniformément. L'exemple précédent montre que la charge varie comme le rayon de courbure et donc que la densité de charge varie comme l'inverse du rayon de courbure. C'est pourquoi, le champ électrique devient très important au voisinage des pointes conductrices, là où le rayon de courbure est petit. La simulation ci-contre illustre ce phénomène. Cet effet, dit *effet de pointe*, permet d'expliquer pourquoi la foudre tombe le plus souvent sur des corps pointus (clochers, arbres) et notamment sur les paratonnerres qui servent précisément à cela : près d'une pointe le champ électrique peut être suffisamment important pour ioniser localement l'air et produire un canal conducteur qui peut entrer en contact avec un canal conducteur descendant ; un éclair se produit alors.



4.3.2 Les condensateurs

Considérons deux conducteurs $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On électrise $\mathcal{C}_1$ en le portant au potentiel V_1 : il s'entoure alors d'une charge Q_1 (positivement pour fixer les idées). Quant à $\mathcal{C}_2$, il est neutre. Approchons maintenant le conducteur chargé vers le conducteur neutre : le champ électrique créé par $\mathcal{C}_1$ éloigne alors les charges positives et attire les charges négatives. Ainsi, $\mathcal{C}_2$ se recouvre d'une distribution de charge non uniforme telle que $\int \sigma \, \mathrm{d}S = 0$. Si maintenant, le conducteur $\mathcal{C}_2$ est mis à la Terre

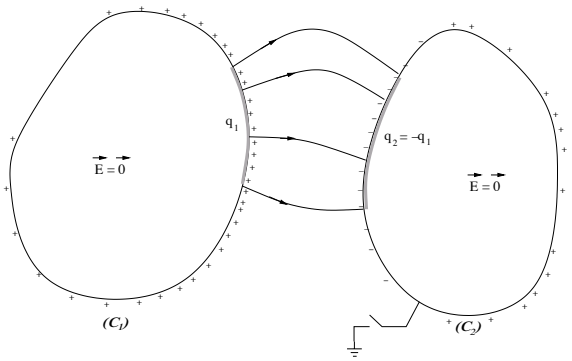


FIGURE 4.2 – Influence partielle.

($V_2 = 0$), les charges positives vont être neutralisées par des charges provenant de la Terre. Le résultat est que le conducteur $\mathcal{C}_2$ se charge négativement : on dit que le conducteur s'est chargé par *influence partielle*. On a la relation

$$Q_2 = C_{21} V_1$$

où $C_{21} < 0$ désigne le coefficient d'influence.

Examinons maintenant le cas particulier où le conducteur $\mathcal{C}_2$ entoure $\mathcal{C}_1$. Dans cette configuration, toutes les lignes de champ issues de $\mathcal{C}_1$ arrivent nécessairement sur $\mathcal{C}_2$. La surface intérieure de $\mathcal{C}_2$ se recouvre d'une charge $Q_{2\,\mathrm{int}}$ de signe opposé à celle que contient $\mathcal{C}_1$. Par ailleurs, en vertu du théorème de Gauss (faire le même raisonnement que dans l'exemple du § précédent) on a

$$Q_1 = -Q_{2\,\mathrm{int}}$$

On parle d'*influence totale* et l'ensemble des deux conducteur forme alors ce que l'on appelle un *condensateur constitué de deux armatures conductrices*.

La capacité d'un condensateur mesure l'aptitude à stocker une quantité de charge sur l'armature interne. En effet, on montre que si l'on soumet le condensateur à une tension $U = V_1 - V_2$, l'armature interne se recouvre d'une charge

$$\boxed{Q_1 = CU} \quad \heartsuit \tag{4.9}$$

où C mesure la capacité du condensateur et ne dépend que de sa géométrie. La capacité d'un condensateur se mesure, comme la capacité d'un conducteur, en farad (symbole : F). L'ordre de grandeur de C est variable ; ça va *grosso modo* de 10^{-12} F à 10^{-3} F.

4.3.3 Capacité d'un condensateur plan

On forme un condensateur plan en approchant deux conducteurs plans soumis à une différence de potentiel. Sur la figure ci-contre, l'armature du bas est soumise à un potentiel positif V_+ et celle du haut à un potentiel V_- de sorte que la tension qui règne entre les armatures vaut $U = V_+ - V_-$. Sur les faces en regard se condensent des charges de signe opposé : on a influence totale.

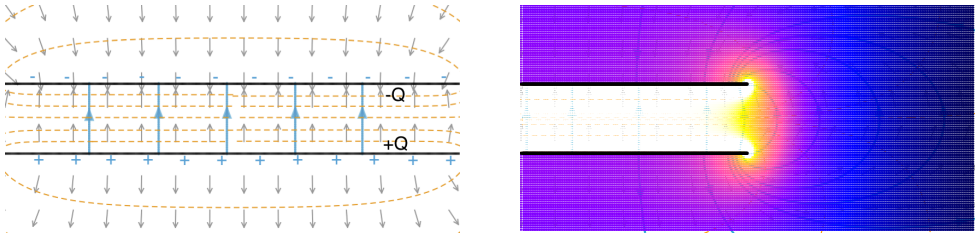


FIGURE 4.3 – À gauche : condensateur plan. À droite : effets de bord.

En revanche, sur les faces externes des armatures, la densité de charge est quasi nulle. En effet, comme on peut le voir sur la carte d'intensité du champ, le champ électrique est intense entre les armatures et quasi-nul à l'extérieur. On remarque également qu'entre les armatures, les lignes de champ sont rectilignes ce qui signifie que le champ est uniforme comme on peut également le voir sur la carte d'intensité. Notez enfin ce qui se passe aux bords des armatures : les charges ont tendance à se concentrer sur les bords par effets de pointe, ce qui explique la valeur intense du champ près des bords. Le caractère uniforme du champ n'est donc valable qu'entre les armatures et tant qu'on reste éloigné des bords. Pour une animation interactive, voir http://femto-physique.fr/electromagnetisme/conducteurs_electriques.php.

Calculons la capacité de ce condensateur en supposant les armatures suffisamment proches pour pouvoir utiliser le théorème de Coulomb. Le champ électrique qui règne entre les armatures vaut donc $\overrightarrow{E} = \sigma/\epsilon_0 \, \overrightarrow{n}_{\text{ext}}$. La tension qui règne entre les armatures s'obtient en intégrant ce champ le long d'une ligne de champ :

$$U = V_+ - V_- = \int_{A_+}^{A_-} \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$$

où e désigne l'espacement entre les armatures. De plus, si l'on néglige les *effets de bord*, on peut considérer que la répartition des charges est uniforme, d'où $Q = \sigma S$ avec S l'aire de chaque face en regard et $\pm Q$ les charges des faces en influence totale. Ainsi, on trouve

$$Q = \left(\frac{\epsilon_0 S}{e}\right) U$$

Un condensateur plan, possède donc une capacité

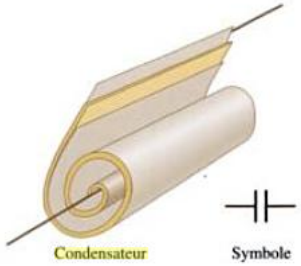
$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{e}} \ \heartsuit \tag{4.10}$$

La relation obtenue indique que plus l'espacement est petit, plus le phénomène de condensation est important.

Rôle du diélectrique

La formule précédente est valable si l'espace inter-armatures est vide. En pratique, on enroule deux rubans métalliques (aluminium ou étain) jouant le rôle des armatures, que l'on sépare par deux rubans isolants (papier paraffiné, plastique). La présence de cet isolant, dit diélectrique, a pour effet d'augmenter la capacité du condensateur formé suite au phénomène de polarisation électrique (voir cours Électromagnétisme II). On montre que la capacité s'écrit sous la forme

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad \text{avec} \quad \epsilon = \epsilon_0 \times \epsilon_r$$



où ϵ_r désigne la *permittivité diélectrique relative* qui dépend du matériau diélectrique utilisé.

Diélectrique	ϵ_r	**Diélectrique**	ϵ_r
vide	1	Mica	3-6
air	1,0006	Bois	2,5-8
paraffine	2,5-3,5	Porcelaine	6
huile	4	Glycerine	56
verre	5-10	Eau Pure	81

4.3.4 Énergie stockée par un condensateur

Par définition, *l'énergie d'un condensateur chargé* W_E est l'énergie qu'il est susceptible de libérer lors de sa décharge, c'est-à-dire lorsqu'on ramène sa tension à zéro en reliant les deux armatures par un fil conducteur, par exemple.

Considérons l'armature interne au potentiel V_A et portant une charge Q. L'armature externe soumise au potentiel V_B porte, quant à elle, une charge interne $-Q$ et une charge externe Q' qui ne dépend que du potentiel V_B.

Lorsque le condensateur est chargé, l'énergie électrostatique du système de charge vaut :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i = \frac{1}{2}\left(QV_\mathrm{A} - QV_\mathrm{B} + Q'V_\mathrm{B}\right)$$

On décharge le condensateur en augmentant le potentiel V_A à la valeur V_B : il n' y a plus de charge en influence mais il reste éventuellement une charge Q' sur la face externe de l'armature :

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i = \frac{1}{2}Q'V_\mathrm{B}$$

Par définition, l'énergie électrostatique du condensateur W_E vaut

$$W_E = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}QU_\mathrm{AB} = \frac{1}{2}C{U_\mathrm{AB}}^2 \quad \heartsuit \tag{4.11}$$

5 – INTERACTIONS MAGNÉTIQUES

Ce cours introduit la notion de champ magnétique en laissant de côté pour l'instant son origine. On se concentre ici sur les interactions magnétiques :

- l'interaction de Lorentz entre une charge et un champ magnétique ;
- l'interaction de Laplace entre un conducteur parcouru par un courant électrique et un champ magnétique.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

http://femto-physique.fr/electromagnetisme/interaction_magnetique.php

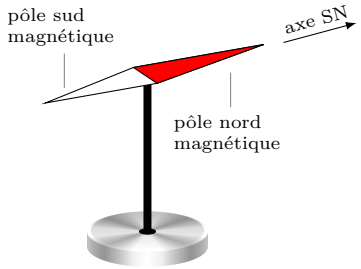
Sommaire

5.1 Les aimants 45
5.1.1 Propriétés des aimants 45
5.1.2 Notion de champ magnétique 45
5.2 Force de Lorentz 46
5.2.1 Définition du champ magnétique 46
5.2.2 Mouvements d'une particule dans un champ magnétique uniforme . . . 47
5.2.3 Quelques applications 49
5.3 Interaction magnétique avec les courants électriques 51
5.3.1 Force de Laplace 51
5.3.2 Effet Hall (1879) 52
5.3.3 Travail des forces de Laplace 53
5.3.4 Dipôle magnétique dans un champ magnétique 55

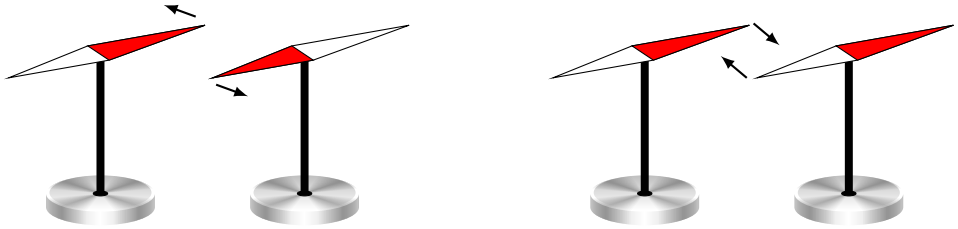
5.1 Les aimants

5.1.1 Propriétés des aimants

La « pierre d'aimant » qui a la propriété d'attirer les petits morceaux de fer, est connue depuis l'antiquité grecque. On trouve cette pierre étonnante dans la région de Magnésie, en Asie Mineure. On sait aujourd'hui qu'elle est formée essentiellement d'oxyde de Fer Fe_3O_4 que l'on appelle magnétite. Façonnée et polie en forme de cuiller, elle est utilisée en Chine dès le III^{e} siècle à des fins divinatoires. Il faut attendre l'an Mille environ pour voir apparaître les première boussoles. Elle est adoptée par les navigateurs arabes puis européens pour s'orienter en mer. L'usage du compas de marine devient primordial avec les grandes explorations à la Renaissance. Sa pièce principale est une aiguille d'acier que l'on a aimantée par frottement contre une pierre d'aimant.



Les aimants présentent toujours au moins deux pôles, appelés pôle sud et pôle nord. Lorsque l'on approche deux aimants, on met aisément en évidence deux types d'interaction : deux pôles de même nature se repoussent alors que deux pôles de nature différente s'attirent.



5.1.2 Notion de champ magnétique

> **Expérience** : En un point de la surface terrestre et en l'absence d'aimants et/ou de circuits électriques, l'aiguille d'une boussole s'oriente dans la direction Sud-Nord. Approchons un aimant : l'orientation de la boussole s'en trouve modifiée. Déplaçons la boussole autour de l'aimant : la direction de la boussole varie d'un point à l'autre. Enfin, perturbons l'aiguille de la boussole : elle se met à osciller autour de la direction indiquée initialement. Si l'on rapproche l'aimant, l'aiguille oscille de plus en plus vite.

Interprétation

Sur Terre, il règne un champ de force magnétique qui oriente toutes les boussoles dans l'axe Sud-Nord. Par convention, le pôle qui indique le Nord [1] est appelé pôle nord de la boussole, l'autre étant alors le pôle sud.

Un aimant modifie les propriétés magnétiques de l'espace : il crée un champ magnétique. Ce champ présente une direction donnée par la boussole et un sens donné par l'axe SN de la boussole.

Enfin, plus ce champ est important, plus l'aiguille est forcée de s'aligner avec ce champ ce qui explique l'augmentation de la fréquence des oscillations.

1. Il s'agit du nord magnétique terrestre situé dans l'océan arctique, à quelques degrés de latitude du Nord géographique

Conclusion
L'espace est caractérisé par un champ de force qui présente les attributs d'un vecteur que l'on nomme vecteur champ magnétique et que l'on note généralement $\overrightarrow{B}(\mathrm{M})$. Ce champ est détectable par une boussole.

Une façon de visualiser le champ magnétique que produit un aimant consiste à disperser autour, de la limaille de fer : les aiguilles de fer s'aimantent puis de comportent comme de petites boussoles qui s'orientent suivant le champ magnétique local.

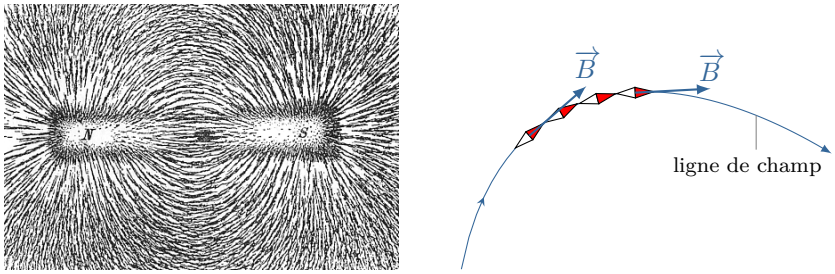


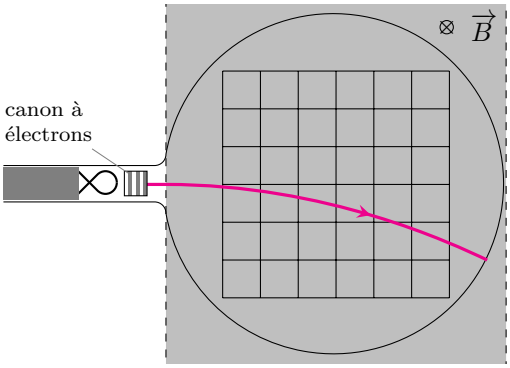
FIGURE 5.1 – Spectre magnétique : les grains de limaille de fer se comportent comme de petites boussoles, matérialisant ainsi les lignes de champ.

5.2 Force de Lorentz

5.2.1 Définition du champ magnétique

Le champ magnétique est défini à partir de la force de déflexion que ressent une particule chargée en présence d'une source de champ magnétique.

Considérons un tube de Crookes dans lequel on produit un faisceau d'électrons entre deux électrodes. Les électrons, en entrant en collision avec les quelques molécules du gaz résiduel du tube, produisent une lumière de fluorescence, rendant ainsi visible leur trajectoire.



Approchons maintenant un aimant perpendiculairement à la vitesse initiale : le faisceau est alors dévié tout en restant dans un plan perpendiculaire au champ magnétique. Ainsi, une charge électrique en mouvement ressent, en plus de la force électrique, une force de nature magnétique. L'analyse de la trajectoire montre que la force électromagnétique que subit une particule chargée en mouvement s'écrit

$$\overrightarrow{F} = \underbrace{q\overrightarrow{E}}_{\text{force électrique}} + \underbrace{q\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}}_{\text{force magnétique}} \quad \heartsuit \tag{5.1}$$

ce qui définit le champ magnétique $\overrightarrow{B}$.

Dans le Système International d'Unités, le champ magnétique s'exprime en Tesla en hommage à Nikola Tesla [2]. L'analyse dimensionnelle montre que

$$[F] = \mathrm{I\,L\,B} \quad \Longrightarrow \quad 1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{N.A^{-1}m^{-1}}$$

La figure ci-dessous donne quelques ordres de grandeurs du champ magnétique.

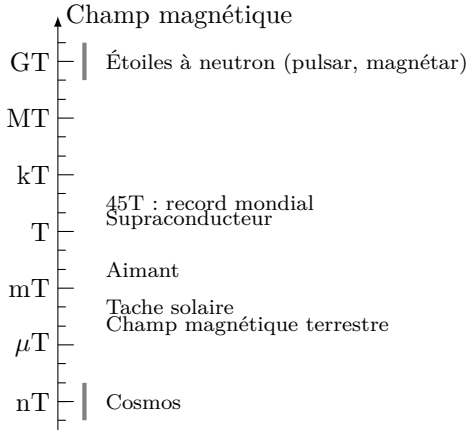
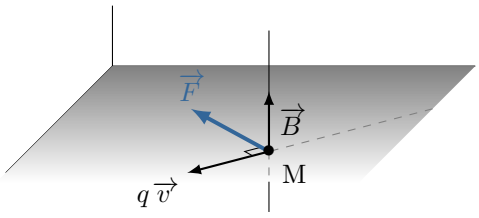


FIGURE 5.2 – Ordres de grandeur

La force magnétique étant constamment perpendiculaire au vecteur vitesse, elle ne fournit pas de puissance mécanique et donc pas de travail.

$$\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{v} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$



Par conséquent, en vertu du théorème de l'énergie cinétique, une particule soumise uniquement à la force magnétique conserve sa vitesse constante en norme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathcal{P} = 0$$

La force magnétique incurve la trajectoire sans modifier la vitesse de la particule.

Remarques :

- La force magnétique ne travaille pas. Cependant, si le champ magnétique varie dans le temps, il apparaît un champ électrique lié à la variation du champ magnétique (phénomène d'induction) qui, lui, travaille.
- Pour des particules élémentaires, les forces de pesanteur sont en général négligeables devant la force électromagnétique.

5.2.2 Mouvements d'une particule dans un champ magnétique uniforme

Étudions le mouvement d'une particule de charge q située dans une zone où règne un champ magnétique uniforme et permanent $\overrightarrow{B}$. On néglige la force de gravitation devant la force de Lorentz.

2. Nikola Tesla (1856-1943) : ingénieur électricien croate (Empire Austro-hongrois) naturalisé américain, il est considéré comme l'un des plus grands inventeurs du 20ème siècle avec plus de 900 brevets à son actif. Il fut l'opposant à Edison concernant le transport de l'électricité et partisan de l'utilisation des courants alternatifs.

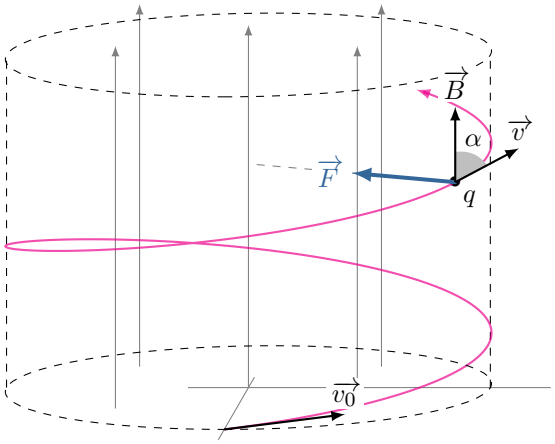


FIGURE 5.3 – Mouvements hélicoïdal d'une particule de charge négative dans un champ magnétique.

Dans la base de Frenet, l'accélération de la particule s'écrit (*cf.* Mécanique du point - Cinématique) :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\,\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\,\overrightarrow{n} = \frac{v^2}{\rho}\,\overrightarrow{n} \quad \text{car} \quad v = \mathrm{C^{te}}$$

Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, la seconde loi de Newton $F = ma$ donne

$$|q|\,vB\sin\alpha = m\frac{v^2}{\rho}$$

où α représente l'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur champ magnétique. Trois cas de figure se présentent :

- $\alpha = 0$ ou π : la force magnétique est nulle et le vecteur vitesse reste constant en direction et en norme. Le mouvement est rectiligne uniforme.
- $\alpha = \pi/2$: la vitesse n'a pas de composante suivant $\overrightarrow{B}$, et la force est perpendiculaire au champ magnétique. Ainsi, le mouvement s'effectue dans le plan formé par la vitesse $\overrightarrow{v}$ et la force de Lorentz. Par ailleurs, le rayon de courbure vaut $\rho = \dfrac{mv}{|q|\,B}$. Ce rayon de courbure est constant si le champ magnétique est uniforme et permanent : la trajectoire est donc un cercle de rayon

  $$R = \frac{mv}{|q|\,B} \quad \heartsuit \tag{5.2}$$

  Ce cercle est décrit à la vitesse angulaire

  $$\omega_c = \frac{v}{R} = \frac{|q|\,B}{m}$$

  qui ne dépend que du rapport q/m et du champ magnétique. Cette vitesse angulaire est aussi appelée **pulsation cyclotron**.
- Dans les autres cas, il est facile de montrer que la composante de la vitesse suivant la direction du champ magnétique reste constante. Le mouvement se décompose alors en un mouvement uniforme suivant le champ magnétique et un mouvement circulaire dans un plan perpendiculaire. On obtient un **mouvement hélicoïdal** dont l'axe est le champ magnétique et le rayon de courbure

  $$\rho = \frac{mv}{|q|\,B\sin\alpha}$$

Remarques :

- La formule $R = \frac{mv}{|q|B}$ peut s'écrire $R = \frac{p}{|q|B}$ avec p la quantité de mouvement de la particule. Cette formule a l'intérêt d'être applicable dans le cas où les particules sont relativistes.
- Une particule accélérée dissipe de l'énergie sous la forme d'un rayonnement électromagnétique, dit rayonnement cyclotron, et a pour effet une diminution de la vitesse –et donc du rayon de courbure– au cours du temps. Cet effet est négligé ici.

5.2.3 Quelques applications

Le cyclotron

Le cyclotron est un accélérateur de particules inventé par l'américain Lawrence en 1932 (Prix Nobel 1939). Il est constitué de deux demi-cylindres creux, appelés « dees », séparés par un intervalle étroit. Dans les « dees », il règne un champ magnétique uniforme perpendiculaire à leur base. Une tension électrique sinusoïdale est appliquée entre les « dees » dans un plan perpendiculaire au champ magnétique.

Le principe du cyclotron repose essentiellement sur le fait que la fréquence de révolution d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme est indépendante de la vitesse de la particule. On injecte au centre du dispositif des particules chargées, en général des protons ou des ions. La tension produite entre les « dees » accélère les particules. Ensuite, arrivées dans un des « dees », elles décrivent des portions de cercle à la vitesse angulaire $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$ indépendante de leur vitesse. La tension appliquée oscille à la fréquence cyclotron de sorte que les particules en sortant du « dee » sont à nouveau accélérées. Gagnant de la vitesse, ils décrivent dans le « dee » suivant un arc de cercle de rayon plus grand. Ainsi, à chaque tour, le rayon de courbure augmente jusqu'à atteindre le rayon maximum $R_{\max}$ imposé par la taille du cyclotron. En sortie du cyclotron, le faisceau de particules accélérées est en général envoyé sur une cible.

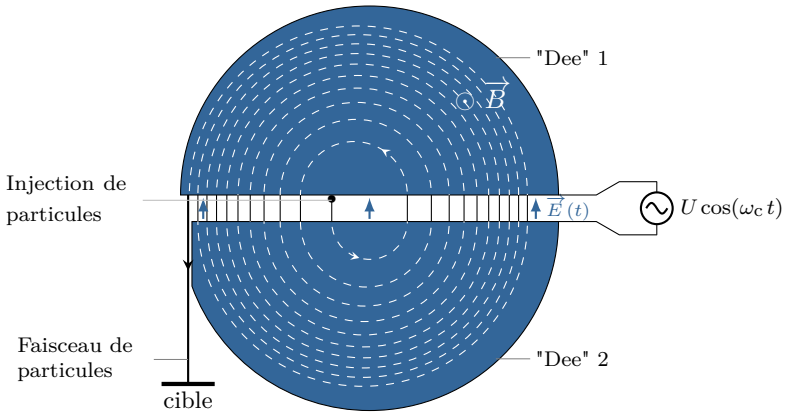


FIGURE 5.4 – Principe du cyclotron (la charge est négative ici).

La quantité de mouvement maximum des particules vaut alors

$$p = mv_{\max} = |q|\,BR_{\max}$$

L'énergie cinétique maximum s'écrit simplement

$$\mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{q^2B^2R_{\max}^2}{2m}$$

Pour un proton par exemple, en prenant $B \approx 1$ T et $R_{\max} \approx 1$ m, on obtient $\mathcal{E}_c \approx 50$ MeV.

Le cyclotron est utilisé de nos jours pour produire des Radio-Isotopes utilisés en médecine nucléaire (radio-thérapie) et en recherche pour la physique nucléaire.

Le spectromètre de masse à analyseur magnétique

La spectrométrie de masse est une technique d'analyse permettant d'identifier les molécules d'un composé à analyser. Dans un spectromètre de masse à analyseur magnétique, on injecte les molécules dans une chambre d'ionisation : un bombardement électronique permet de briser les molécules de façon à former des fragments d'ions moléculaires positifs. Ces ions sont ensuite accélérés grâce à un champ électrique et un dispositif de filtrage garantit que les ions sortent avec la même vitesse v_0. Ils entrent ensuite dans un zone où règne un champ magnétique uniforme produit par un électroaimant. Ces ions décrivent alors un arc de cercle de rayon $R = mv_0/|q|B$ avant d'être reçu sur un détecteur. La vitesse et le champ magnétique étant contrôlés, la position de l'impact est en fait une mesure du rapport q/m des ions détectés. En faisant varier le champ magnétique on détecte des ions de masse différentes (ions différents ou ions isotopes) ; l'enregistrement de l'intensité du signal en fonction de la masse s'apelle le *spectre de masse*. De ces informations il est possibles d'en déduire la formule brute des molécules présents dans le composé. L'étendue des applications de cette technologie est

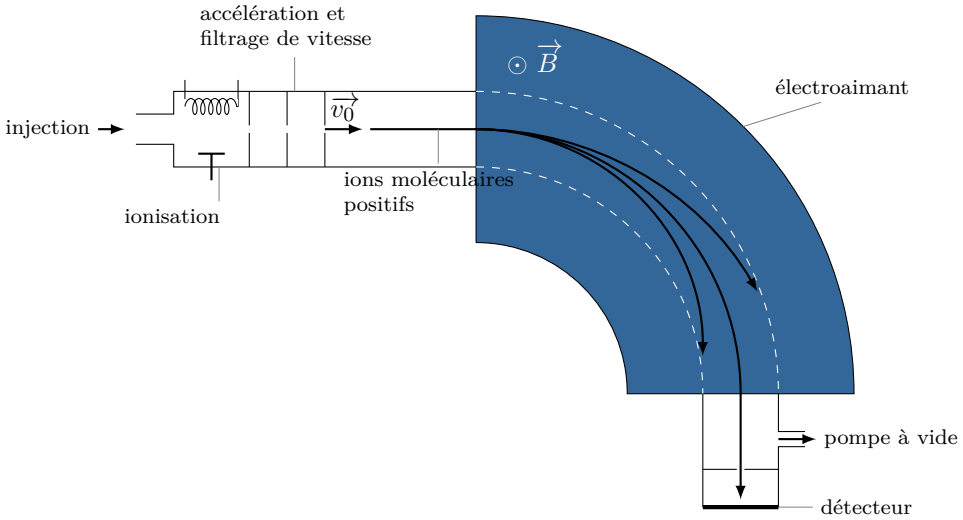


FIGURE 5.5 – Principe du spectromètre de masse

assez vaste.

- En chimie analytique : détermination de la formule brute des molécules ;
- En chimie de l'environnement : analyse de l'air et de l'eau ; suivi de la pollution par des pesticides ou des processus industriels.
- En biochimie : identification de protéines (séquençage d'acides aminés) et de micro-organismes ; analyse de gaz sanguins ; pharmacologie ; toxicologie.
- En physique fondamentale : mesure de masse d'atomes stables.
- En sciences de la Terre : mesure des rapports isotopiques (géologie, océanographie, glaciologie, volcanologie, physique de l'atmosphère, étude des météorites, planétologie, etc.).

5.3 Interaction magnétique avec les courants électriques

5.3.1 Force de Laplace

Considérons un conducteur filiforme parcouru par un courant électrique d'intensité I en présence d'un champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$. Admettons que ce conducteur soit en mouvement dans le champ magnétique et analysons les forces qui s'exercent sur une portion orientée $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ de conducteur.

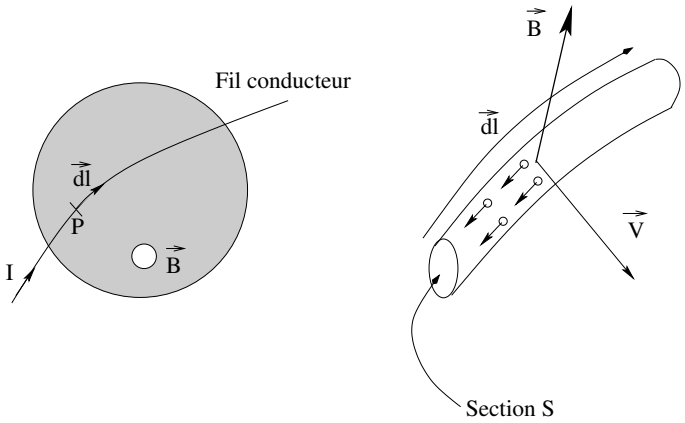


FIGURE 5.6 – Notations pour la force de Laplace.

Adoptons les notations suivantes :

- s est la section droite du fil conducteur ;
- n_- est le nombre de porteurs de charges mobiles (charges q_-) par unité de volume ;
- n_+ est le nombre de cations fixes (charges q_+) par unité de volume assurant la neutralité de la matière ;
- $\overrightarrow{V}$ est la vitesse de la portion de conducteur *par rapport au laboratoire* ;
- $\overrightarrow{v}$ est la vitesse moyenne des porteurs de charge libres *par rapport au conducteur*.

L'électroneutralité du conducteur impose

$$n_- q_- + n_+ q_+ = 0$$

Intéressons-nous à la force magnétique que ressent une portion de conducteur. Appelons $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ un élément de longueur du conducteur situé en M et orienté par le sens algébrique du courant. Sommons toutes les forces magnétiques de Lorentz subies par toutes les particules chargées :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = n_- s \mathrm{d}\ell q_- (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{V}) \wedge \overrightarrow{B} + n_+ s \mathrm{d}\ell q_+ \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B} = n_- s \mathrm{d}\ell q_- \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

On reconnaît dans cette expression le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j} = q_- n_- \overrightarrow{v}$ d'où

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = s \mathrm{d}\ell \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$$

Dans le cas d'un circuit filiforme, on a $\overrightarrow{j}\, s\, \mathrm{d}\ell = I\, \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$. Ainsi

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F} = I\, \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{B}$$

La résultante des forces s'écrit alors

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \oint_{\mathcal{C}} I\, \overrightarrow{\mathrm{d}l} \wedge \overrightarrow{B}} \quad \heartsuit \tag{5.3}$$

Cette force, dite force de Laplace, représente la force macroscopique que ressent un conducteur dans un champ magnétique.

> **Remarque** : Si le conducteur n'est pas filiforme, on utilisera la formule plus générale
>
> $$\overrightarrow{F} = \iiint \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}\, \mathrm{d}\tau$$
>
> où l'intégration est effectuée sur le volume du conducteur ($\mathrm{d}\tau$ représente l'élément de volume).

La force de Laplace possède de nombreuses applications dans le domaine électrotechnique :

- le moteur électrique continu produit un mouvement rotatif à l'aide d'un courant continu dans un champ magnétique radial ;
- le haut-parleur électrodynamique produit un déplacement alternatif d'une membrane à l'aide d'un courant alternatif transformant ainsi l'énergie électrique en énergie sonore ;
- l'ampèremètre à aiguille relie la mesure d'une intensité électrique à un angle de torsion d'un circuit électrique dans un champ magnétique.

5.3.2 Effet Hall (1879)

On peut se demander comment les porteurs de charge libres réussissent à transmettre la force magnétique à l'ensemble du conducteur. En fait, en présence d'un champ magnétique, ces porteurs de charge sont déviés et tentent de sortir du conducteur. Cependant, les charges fixes du cristal les retiennent au sein du conducteur : c'est par ce processus que la force magnétique est transmise au conducteur.

De surcroît, en s'accumulant sur les parois, les porteurs de charge libres créent un champ électrique dont l'effet compense la force magnétique et assure ainsi un régime permanent (les porteurs de charge se déplacent à une vitesse moyenne constante). Ce champ électrique produit une tension que l'on peut mesurer : c'est l'effet Hall[3]. Considérons une plaquette conductrice de longueur ℓ,

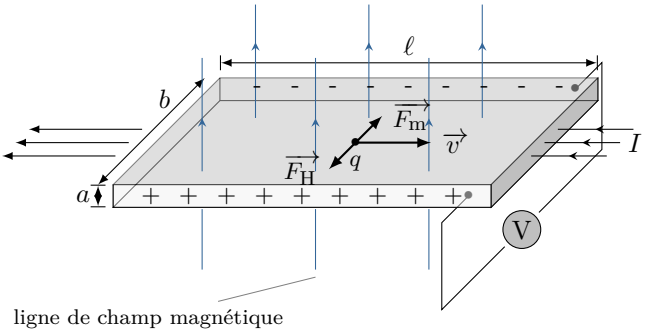


FIGURE 5.7 – Effet Hall

de largeur b et de faible épaisseur a. La plaquette, parcourue par un courant d'intensité I, est placée dans un champ magnétostatique uniforme et perpendiculaire à sa plus grande face. La force magnétique concentre les charges mobiles sur un bord ce qui produit une force électrique s'opposant à la force magnétique. Une situation d'équilibre apparaît très vite quand :

$$q_- \overrightarrow{E} + q_- \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow \quad E = vB$$

Le champ électrique est tel que le trièdre $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{v})$ est direct. Il règne donc une tension U_H, dite tension de Hall, entre les bords de la plaquette. Cette tension s'obtient en calculant la circulation du

3. Découvert en 1879 par Edwin Herbert Hall.

champ électrique entre les bords. Le champ électrique étant constant on a tout simplement

$$U_{\mathrm{H}} = E \times b = vBb$$

Or, le courant électrique présente une intensité

$$I = j\,s = n_- |q_-|\, v\, ab$$

D'où

$$U_{\mathrm{H}} = R_{\mathrm{H}} \frac{IB}{a} \quad \text{avec} \quad R_{\mathrm{H}} = \frac{1}{|q_-|\, n_-} \quad \heartsuit \tag{5.4}$$

où la grandeur R_H désigne la *constante de Hall*. Ainsi, on prévoit que la tension de Hall est proportionnelle au champ magnétique. Cet effet est mise à profit dans les *Teslamètres à effet Hall*. On trouve également des sondes à effet Hall dans les téléphones portables ce qui permet de mesurer l'orientation du champ magnétique terrestre et donc de s'orienter. Par ailleurs, la polarité de la tension de Hall permet d'identifier la nature des porteurs de charge libres.

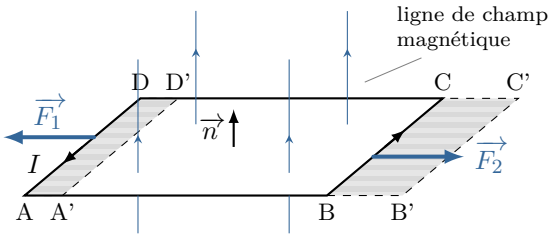
Remarques :

- Pour un champ magnétique de 1 T, une intensité électrique de 1 A et une épaisseur $a = 100\,\mu$m on obtient $U_{\mathrm{H}} \approx 1\,\mu$V dans un métal. Cette tension est donc difficilement mesurable. En revanche, dans un semi-conducteur l'effet est multiplié par 10^6 car la densité des porteurs de charge est beaucoup plus faible ce qui explique leur utilisation dans les teslamètres.
- L'étude de l'effet hall dans des systèmes ultra minces (systèmes 2D) à basse température et en présence d'un fort champ magnétique a mis en évidence l'effet Hall quantique qui valu le prix Nobel de Physique à Klaus von Klitzing en 1985. Evidemment, une description quantique de la conduction est nécessaire pour interpréter ce phénomène.

5.3.3 Travail des forces de Laplace

Cherchons à calculer le travail des forces de Laplace lors du déplacement d'un circuit alimenté par un courant constant dans un champ indépendant du temps.

Cas d'un cadre rectangulaire



Considérons un cadre ABCD rectangulaire parcouru par un courant d'intensité I se déplaçant dans un champ magnétique uniforme. Pour simplifier nous supposons que le cadre se déplace suivant (AB) et qu'il peut se déformer (son aire peut donc varier). Notons $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$ le déplacement de la portion AD et $\overrightarrow{\mathrm{BB}'}$ celui de la portion BC.

Seules les forces qui s'exercent sur AD et BC travaillent. La portion AD subit une force de Laplace $\overrightarrow{F_1}$ dont le travail s'écrit

$$W_1 = I(\overrightarrow{\mathrm{DA}} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AA}'} = I(\overrightarrow{\mathrm{AA}'} \wedge \overrightarrow{\mathrm{DA}}) \cdot \overrightarrow{B}$$

Or, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA}'} \wedge \overrightarrow{\mathrm{DA}}$ a pour norme, l'aire S_1 de la surface balayée et est dirigé perpendiculairement à celle ci. On a

$$W_1 = -I\,\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\,S_1$$

où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface du cadre dont le sens est lié au sens positif du courant *via* la règle du tire-bouchon [4]. De la même manière, la force $\overrightarrow{F_2}$ qui s'exerce sur la portion BC produit un travail

$$W_2 = I(\overrightarrow{\mathrm{BC}} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{BB}'} = I(\overrightarrow{\mathrm{BB}'} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BC}}) \cdot \overrightarrow{B}$$

Ici, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BB}'} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ a pour norme l'aire de la surface balayée par la branche BC et un sens identique à $\overrightarrow{n}$. On a donc

$$W_2 = I\,\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\,S_2$$

Finalement, la travail des forces de Laplace qui s'exerce sur le cadre vaut $W = I\,\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}(S_2 - S_1)$. Si l'on note $\phi_B = \overrightarrow{B}\,\overrightarrow{n}\,S$ le flux magnétique à travers le cadre, on trouve

$$W = I\,\Delta\phi_B$$

Le travail est proportionnel à l'intensité du courant et à la variation du flux magnétique.

Généralisation

La calcul réalisé précédemment se généralise à tout circuit dans un champ magnétique permanent. On retiendra que le travail des forces de Laplace vaut

$$\boxed{W = I\Delta\phi_B \quad \text{avec} \quad \phi_B = \iint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S} \ \heartsuit \tag{5.5}$$

> **Remarque** : On peut s'étonner de l'apparente contradiction qu'il y a entre le fait que la force de Laplace est d'origine magnétique et qu'elle produit paradoxalement du travail. En réalité, le travail des forces magnétiques qui s'exercent sur les charges (libres et fixes) est bien nul. En effet
>
> $$\int_{t_1}^{t_2} \sum (q_i\,\overrightarrow{v_i} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{v_i}\,\mathrm{d}t = \overrightarrow{0}$$
>
> Cependant, ce que l'on a calculé représente le travail macroscopique des forces magnétiques et s'écrit
>
> $$W = \int_{t_1}^{t_2} \sum (q_i\,\overrightarrow{v_i} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{V}\,\mathrm{d}t$$
>
> où $\overrightarrow{V}$ est la vitesse de déplacement du conducteur (et non des charges). Ce travail non nul est en fait compensé par un travail microscopique dit travail électromoteur.

Énergie d'interaction d'un circuit dans un champ magnétique

selon (5.5), le travail des forces de Laplace ne dépend que de l'état initial et final quel que soit le chemin suivi entre ces deux états. On peut donc définir l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p^{\mathrm{mag}}$:

$$\boxed{W = -\Delta\mathcal{E}_p^{\mathrm{mag}} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{E}_p^{\mathrm{mag}} = -I\phi_B} \ \heartsuit \tag{5.6}$$

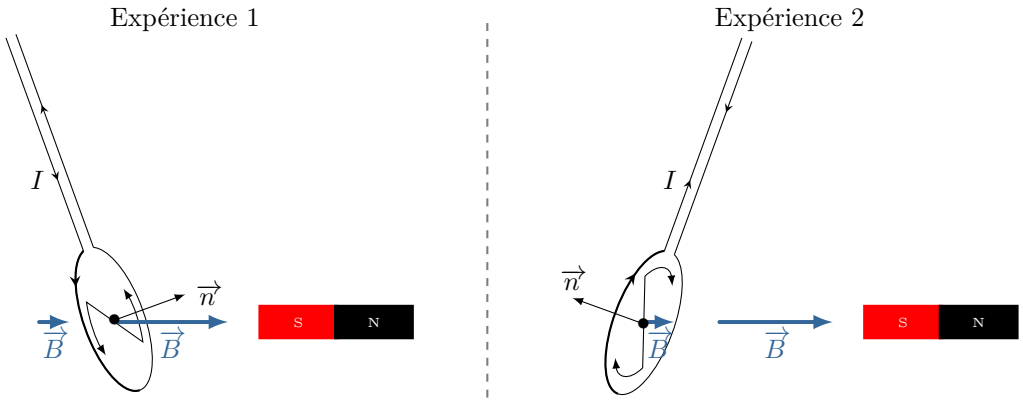
4. un tire-bouchon que l'on fait tourner dans le sens du courant électrique progresse dans le sens de $\overrightarrow{n}$

Règle du flux maximum

Ainsi, un circuit électrique en présence d'un champ magnétique cherchera à minimiser son énergie potentielle magnétique c'est-à-dire à maximiser son flux magnétique : c'est la règle du flux maximum. Pour illustrer cette propriété, imaginons une spire alimentée par un courant d'intensité I et suspendue par deux fils électriques rigides. Approchons le pôle sud d'un aimant. Imaginons que l'orientation du courant soit telle que le flux est positif. Pour maximiser le flux magnétique, la spire doit se rapprocher de l'aimant, là où le champ magnétique est le plus fort : la spire est alors attirée vers l'aimant.

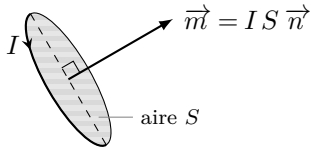
Inversons maintenant le sens du courant. Le flux magnétique est négatif et chercher à le maximiser revient à s'éloigner de l'aimant : la spire est repoussée par l'aimant.

Finalement, ces expériences montrent qu'une spire se comporte comme un aimant dont la polarité dépend du sens du courant. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ indique l'axe sud-nord de l'aimant équivalent.



5.3.4 Dipôle magnétique dans un champ magnétique

Comme on vient de le voir, une boucle de courant se comporte comme un aimant. On peut donc lui associer un pôle sud et un pôle nord. Pour caractériser cette polarité, on définit un vecteur orienté du sud vers le nord dit *moment magnétique* et noté $\overrightarrow{m}$. Pour une spire plane quelconque, le moment magnétique s'écrit



$$\overrightarrow{m} = IS\,\overrightarrow{n} \quad \heartsuit \tag{5.7}$$

où S est l'aire de la surface de la spire et $\overrightarrow{n}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à la spire et dont l'orientation est associé au sens positif du courant par la règle du tire-bouchon. m s'exprime en $\mathrm{A.m^2}$.

> **Remarque** : De manière plus générale, toute distribution de courant localisée dans l'espace est caractérisée par un moment dipolaire magnétique. Pour une boucle filiforme quelconque (pas forcément plane), le moment magnétique s'écrit
>
> $$\overrightarrow{m} = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge I\,\mathrm{d}\,\overrightarrow{\ell}$$
>
> Avec P un point parcourant la boucle.

Action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique

Plaçons un dipôle magnétique dans un champ magnétique permanent. Si le dipôle est de petite taille, on peut considérer que le champ magnétique est localement uniforme. Ainsi l'énergie potentielle magnétique s'écrit

$$\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -I\phi_B = -I\,\vec{B}\cdot\vec{n}\,S = -\vec{m}\cdot\vec{B} \quad \heartsuit \tag{5.8}$$

Le dipôle ressent une résultante des forces magnétiques (qui correspond à la force de Laplace)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{m}\cdot\vec{B})$$

Par conséquent, si le champ magnétique est partout le même, la quantité $\vec{m}\cdot\vec{B}$ ne dépend pas de l'espace et la force magnétique est donc nulle.

> **Remarque** : On peut retrouver ce résultat à partir de l'expression de la force de Laplace puisque si le champ magnétique est uniforme, la force de Laplace se simplifie en :
>
> $$\vec{F} = I\,\vec{L}\wedge\vec{B}$$
>
> avec $\vec{L}$ le vecteur qui joint les extrémités de la portion de circuit qui plonge dans le champ magnétique. Or, pour une boucle de courant, $\vec{L} = \vec{0}$ et donc $\vec{F} = \vec{0}$.

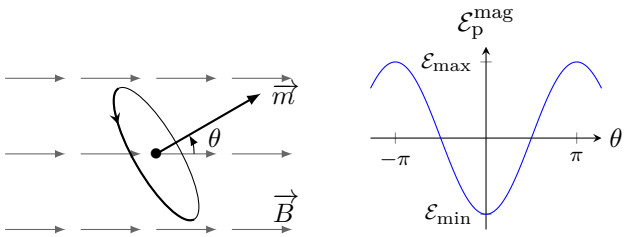


FIGURE 5.8 – Dipôle rigide dans un champ uniforme.

En revanche, en vertu de la règle du flux maximum, le dipôle va chercher à s'orienter de façon à maximiser son flux magnétique. Appelons θ l'angle entre le moment dipolaire magnétique et le champ magnétique. L'énergie magnétique vaut

$$\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -mB\cos\theta$$

On constate alors qu'il existe une position d'équilibre stable lorsque le moment magnétique est aligné avec le champ magnétique extérieur. Autrement dit, les forces magnétiques présentent un couple d'orientation dont on peut exprimer le moment Γ. En effet, supposons le dipôle magnétique animé d'un mouvement de translation (vitesse $\vec{V}$) et d'un mouvement de rotation (vecteur rotation $\vec{\Omega}$). Pendant $\mathrm{d}t$, le travail des forces magnétiques s'écrit

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\vec{V}\,\mathrm{d}t + \vec{\Gamma}\cdot\vec{\Omega}\,\mathrm{d}t = \vec{\Gamma}\cdot\vec{\Omega}\,\mathrm{d}t \tag{5.9}$$

puisque la résultante des forces est nulle. Par ailleurs, le travail produit est relié à la variation d'énergie magnétique *via*

$$\mathrm{d}W = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = \mathrm{d}(\vec{m}\cdot\vec{B})$$

Or, le dipôle étant considéré rigide, le moment magnétique conserve la même norme et seule son sens varie. La formule de dérivation vectorielle (*cf.* cours de mécanique sur le vecteur rotation) donne $\mathrm{d}\vec{m}/\mathrm{d}t = \vec{\Omega}\wedge\vec{m}$ ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}(\vec{m}\cdot\vec{B}) = (\vec{\Omega}\wedge\vec{m})\cdot\vec{B}\,\mathrm{d}t = (\vec{m}\wedge\vec{B})\cdot\vec{\Omega}\,\mathrm{d}t$$

En comparant avec la formule (5.9), on obtient :

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B} \quad \heartsuit \tag{5.10}$$

On retrouve le fait que lorsque le dipôle est aligné avec le champ magnétique, le couple s'annule : le dipôle est en équilibre mécanique.

Analogies
Ces formules sont analogues à celle rencontrées dans l'étude de l'interaction d'un dipôle électrique avec un champ électrique.

grandeurs	électriques	magnétiques
moment dipolaire	$\overrightarrow{p}$	$\overrightarrow{m}$
champ extérieur	$\overrightarrow{E}$	$\overrightarrow{B}$
énergie d'interaction	$\mathcal{E}_p = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}$	$\mathcal{E}_p = -\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{B}$
couple d'orientation	$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}$	$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}$

6 – CHAMP B CRÉÉ PAR DES COURANTS

La loi de Biot et Savart permet de relier le courant électrique aux effets magnétiques qu'il produit dans l'hypothèse où ce courant est stationnaire. Cette loi permet, d'une part de dégager les propriétés de symétrie du champ magnétostatique et d'autre part de le calculer analytiquement dans certains cas simples comme le fil infini et la spire. Enfin, le champ créé par un dipôle magnétique est traitée ce qui permet d'aborder la question de l'origine du magnétisme des aimants.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

http://femto-physique.fr/electromagnetisme/biot_et_savart.php

Sommaire

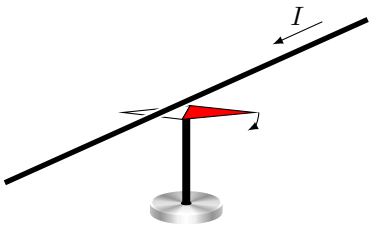
6.1 Le courant électrique comme source de champ magnétique 59
6.1.1 Quelques faits historiques 59
6.1.2 Loi de Biot et Savart 60
6.1.3 Exemple de calcul : le fil rectiligne infini 61
6.1.4 Topographies - Symétries 62
6.2 Champ créé par un dipôle magnétique 65
6.2.1 Champ magnétique créé le long de l'axe d'une spire 65
6.2.2 Approximation dipolaire 66
6.2.3 Origines du magnétisme 66

6.1 Le courant électrique comme source de champ magnétique

6.1.1 Quelques faits historiques

1820 : expérience d'Œrsted

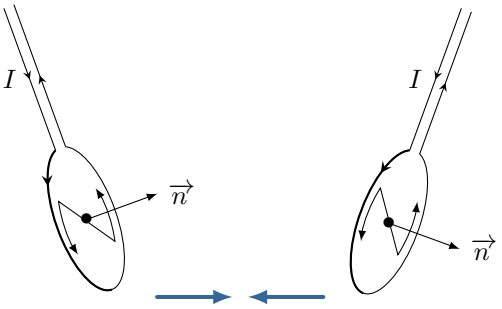
Lors d'un cours, le danois Hans Christian Œrsted découvre qu'un fil conducteur parcouru par un courant électrique [1] fait dévier l'aiguille d'une boussole placée a proximité. Cette expérience prouve sans ambiguïté le lien entre courant électrique et champ magnétique. Par ailleurs, si on inverse le sens du courant, l'aiguille tourne de 180°. L'expérience d'Œrsted suscite un grand intérêt car c'est la première fois qu'on met en évidence une force qui n'est pas suivant la ligne joignant les deux corps en interaction.



1820 : les travaux d'Ampère et d'Arago

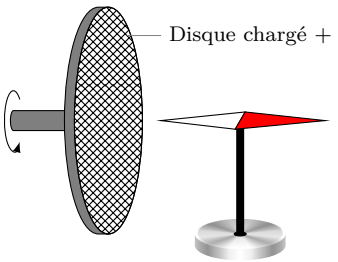
C'est François Arago qui, après avoir assisté à une démonstration de l'expérience d'Œrsted à Genève, la présente à l'Académie des sciences de Paris. Dans l'assemblée, Ampère [2] est enthousiaste et se lance dans un travail expérimentale et théorique. Ampère montre notamment que deux fils rectilignes parcourus par un courant s'attirent ou se repoussent selon que les courants sont dans le même sens ou pas. Il montre également qu'une spire parcourue par un courant se comporte comme un aimant. On peut associer à une spire un pôle nord et un pôle sud. Si l'on change le sens du courant, la polarité change.

Par ailleurs, Arago qui collabore avec Ampère découvre que le courant électrique a la propriété d'aimanter le fer ce qui mènera à l'invention de l'électroaimant.



1876 : expérience de Rowland

Henry Rowland démontre, à l'aide d'un travail expérimental très soigné, qu'un disque chargé électriquement en rotation rapide produit un champ magnétique. Autrement dit, les charges électriques en déplacement produisent les mêmes effets magnétiques qu'un courant électrique ce qui suggère que le courant électrique est lié à un déplacement de charges électriques.



1. À l'époque, la pile de Volta est déjà inventée.
2. André-Marie Ampère (1775 - 1836) : physicien et chimiste français, considéré comme le « Newton de l'électricité ». Né à Polémieux-au-Mont-d'Or, près de Lyon, fils d'un juge de paix lyonnais guillotiné sous la Révolution, André-Marie Ampère mène une brillante carrière scientifique : titulaire de la chaire de mécanique à l'École Polytechnique en 1809, il est élu à l'Académie des Sciences en 1814, puis à la chaire de physique du Collège de France en 1824. Il publie en 1827 son dernier grand ouvrage *Sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience*. Il termine sa vie en tant qu'inspecteur général de l'instruction publique et laissera son nom à l'unité de courant électrique, l'ampère.

Conclusion
Tout mouvement de charges, et notamment le courant électrique, est source de champ magnétique.

6.1.2 Loi de Biot et Savart

L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut réalisée par les physiciens Biot et Savart (1820). Ils mesurèrent la durée des oscillations d'une aiguille aimantée en fonction de sa distance à un courant rectiligne. Ils trouvèrent que la force agissant sur un pôle est dirigée perpendiculairement à la direction reliant ce pôle au conducteur et qu'elle varie en raison inverse de la distance. De ces expériences, Laplace déduisit ce qu'on appelle aujourd'hui la loi de Biot et Savart.

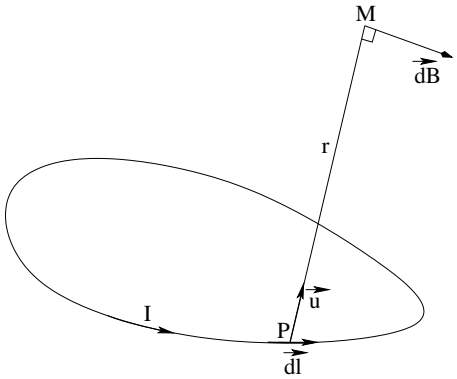


FIGURE 6.1 – Notations

Le champ magnétique que produit une distribution filiforme de courant peut s'obtenir en décomposant la distribution en petits éléments de courant. On considère que chaque élément de courant de longueur orientée $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ traversé par un courant d'intensité I produit un champ magnétique élémentaire en M :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}B}(\mathrm{M}) = K\frac{I\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\wedge\overrightarrow{u}}{r^2}$$

où K est une constante, $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire joignant l'élément de courant à M, et r la distance entre M et la portion de circuit. Il faut voir $\overrightarrow{\mathrm{d}B}$ comme un intermédiaire de calcul, seule la somme de toutes les contributions a un sens physique. Le champ magnétique résultant s'obtient donc en intégrant l'expression précédente, le point P parcourant tout le circuit :

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \oint \overrightarrow{\mathrm{d}B} = K\oint_{\text{circuit}}\frac{I\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\wedge\overrightarrow{u}}{r^2}$$

le symbole $\oint$ signifiant que l'integration s'effectue le long du circuit fermé.

Dans le Système International d'Unités, la définition de l'ampère implique que

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\mathrm{SI}$$

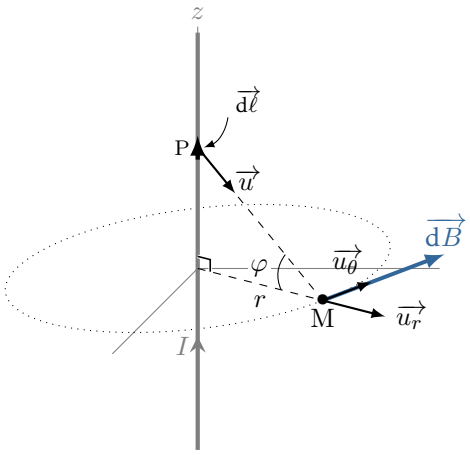
où $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ s'appelle la *perméabilité magnétique du vide*. Ainsi, un circuit filiforme alimenté par un courant stationnaire d'intensité I produit un champ magnétique en M donné par

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\mathcal{C}}\frac{I\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\wedge\overrightarrow{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\mathcal{C}}\frac{I\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\wedge\overrightarrow{\mathrm{PM}}}{\mathrm{PM}^3}$$

La loi de Biot et Savart permet de calculer le champ magnétique créé par une distribution de courant stationnaire filiforme. Cela conduit au calcul de trois intégrales scalaires voire moins lorsque le problème présente suffisamment de symétries.

Il peut arriver que le calcul analytique s'avère ardu, il faut alors envisager une approche numérique.

6.1.3 Exemple de calcul : le fil rectiligne infini



Considérons un fil infini d'axe Oz, parcouru par un courant constant d'intensité I et cherchons le champ magnétique produit à la distance r du fil. À l'aide de la formule de Biot et Savart, on peut exprimer le champ magnétique $\mathrm{d}B$ produit par la portion de longueur $\mathrm{d}\ell$:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\ell\cos\varphi}{\mathrm{PM}^2}$$

avec φ l'angle que fait la droite (MP) avec le plan médiateur passant par M. Choisissons la variable φ comme variable d'intégration. Sachant que $\mathrm{PM} = r/\cos\varphi$ et $\ell = r\tan\varphi$ (d'où l'on tire $\mathrm{d}\ell = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi}$) on obtient

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\varphi}{r}\,\mathrm{d}\varphi$$

Vu que tous les champs élémentaires sont colinéaires et dirigés suivant le vecteur orthoradial $\overrightarrow{u_\theta}$, on peut ajouter les intensités des champs pour avoir le champ magnétique total

$$B(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

Finalement, il règne dans l'espace un champ magnétique

$$\overrightarrow{B}(r,\theta,z) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\overrightarrow{u_\theta} \tag{6.1}$$

Définition de l'ampère

L'ampère est l'intensité d'un courant électrique qui, maintenu constant dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produit entre ces deux conducteurs une force égale à $2.10^{-7}\,\mathrm{N}$ *par mètre de longueur.*

Considérons deux fils infinis, parallèles F_1 et F_2 distants de d. Imposons un courant identique dans les deux fils. D'après le résultat (6.1), F_1 crée au niveau de F_2 un champ magnétique $B = \mu_0 I/2\pi d$. Chaque portion du fil F_2 de longueur L subit donc une force de Laplace attractive de norme

$$F = ILB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2 L}{d}$$

D'après la définition de l'ampère, on a $F = 2.10^{-7}$ N quand $L = 1$ m, $d = 1$ m et $I = 1$ A. On voit alors que *la valeur exacte de la perméabilité magnétique découle de la définition de l'ampère* :

$$\mu_0 \equiv 4\pi.10^{-7}\,\text{SI} \quad \heartsuit \tag{6.2}$$

| **Remarque** : Nous verrons ultérieurement que l'unité internationale de μ_0 est le henry par mètre.

6.1.4 Topographies - Symétries

Décrivons différentes situations afin de dégager les propriétés essentielles du champ magnétique.

Le fil infini

Comme on vient de le voir sur l'exemple précédent, le champ magnétique créé par un long fil rectiligne est *orthoradial*. Par conséquent, les lignes de champ sont des cercles. Contrairement au champ électrique, les lignes de champ magnétique se referment sur elle même. On peut noter que le champ magnétique tourne autour du fil dans un sens imposé par la règle du tire-bouchon : **un tire bouchon tournant dans le sens du champ magnétique progresse dans le sens du courant**.

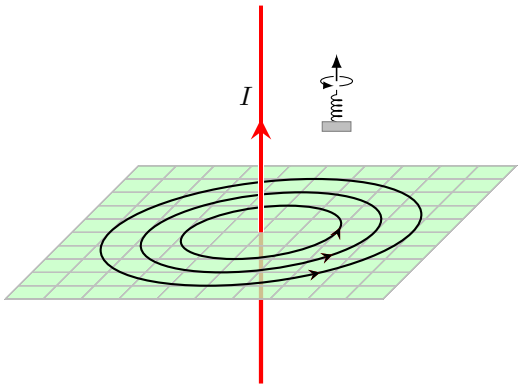


FIGURE 6.2 – Champ magnétique créé par un fil infini.

La spire circulaire

La figure 6.3 présente les lignes de champ magnétique que produit une spire circulaire alimentée par un courant électrique permanent. Ces lignes de champ sont dans des plans perpendiculaires à la spire et contenant son centre. On peut noter, là encore, la structure fermée de ces lignes. Comme on l'a déjà vu précédemment, on peut associer à cette spire un moment magnétique qui indique la direction sud-nord de l'aimant équivalent. Cela correspond également au sens du champ magnétique qui règne au centre de la spire.

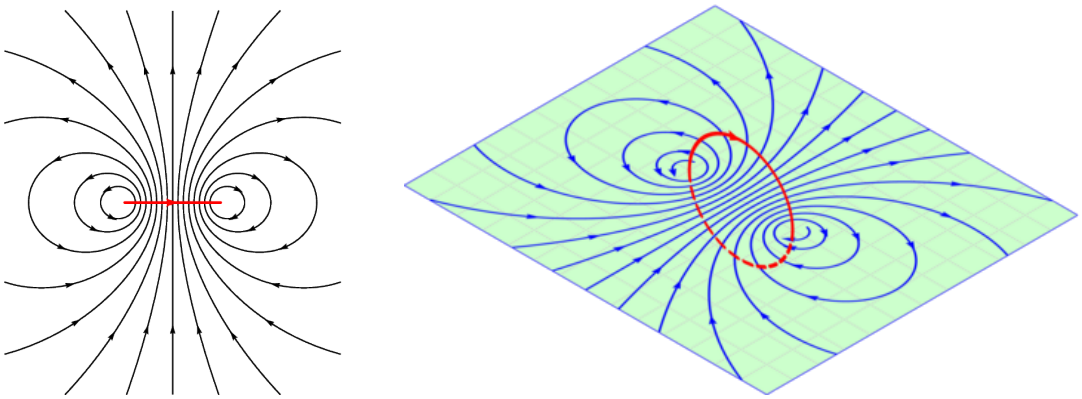


FIGURE 6.3 – Champ magnétique créé par une spire circulaire.

Le solénoïde

Enroulons de façon jointive un fil conducteur sur un cylindre de longueur L : on obtient une bobine ou solénoïde. Cet enroulement est caractérisé par une densité linéique d'enroulement $n = N/L$, avec N le nombre d'enroulements. Bien que cet enroulement soit légèrement hélicoïdal, on peut, dans une première approximation, assimiler le solénoïde à une superposition de spires très rapprochées. Dans ce cas, les lignes de champ sont des courbes planes situées dans un plan coupant en deux le solénoïde dans le sens de la longueur. La figure 6.4 montre l'allure des lignes de champ. À l'intérieur de la bobine, les lignes sont quasiment parallèles ce qui traduit le caractère quasi-uniforme du champ. On montre que lorsque $L \to \infty$, le champ magnétique à l'intérieur est axial, uniforme et ne dépend que de l'intensité électrique et de la densité d'enroulement : $B_{int} = \mu_0 n I$.

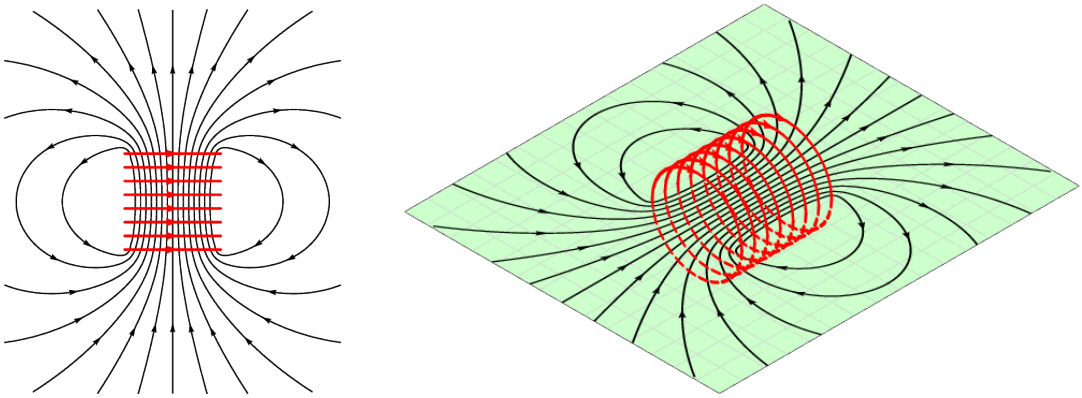


FIGURE 6.4 – Champ magnétique créé par un solénoïde.

À retenir
Pour un enroulement de spires, un tire-bouchon que l'on fait tourner dans le sens du courant électrique progresse dans le sens du champ magnétique au centre et correspond au sens sud-nord de l'aimant équivalent.

Symétries

Le champ magnétique ne présente pas les mêmes propriétés de symétrie que le champ électrique. En effet, la formule de Biot et Savart montre que le champ magnétique se transforme comme un produit vectoriel. On dit que le champ magnétique est un *vecteur axial* ou *pseudovecteur*.

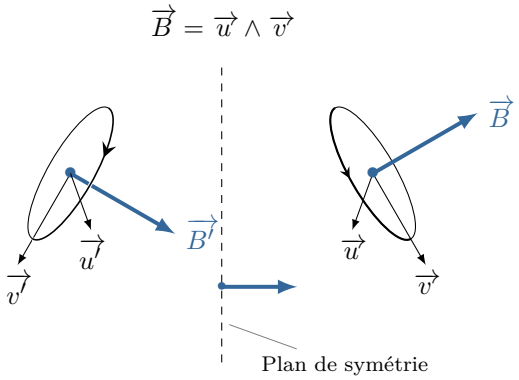


FIGURE 6.5 – Transformation d'un vecteur axial par un plan de symétrie.

En présence d'un plan de symétrie, un vecteur normal[3] se transforme comme dans un miroir. En conséquence, le produit vectoriel de deux vecteurs normaux ne se transforme pas comme dans un miroir. Sur la figure 6.5, on voit que $\overrightarrow{B}$ se transforme ainsi :

$$\mathrm{M} \overset{\text{symétrie}}{\longrightarrow} \mathrm{M'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B}(\mathrm{M}) \overset{\text{symétrie}}{\longrightarrow} -\mathrm{sym}\,\overrightarrow{B}(\mathrm{M})$$

En vertu du principe de Curie, si la distribution de courant est invariante par symétrie, l'opération de la symétrie ne doit pas changer la valeur du champ magnétique. Par conséquent

$$\boxed{\overrightarrow{B}(\mathrm{M'}) = -\mathrm{sym}\,\overrightarrow{B}(\mathrm{M})} \ \heartsuit \tag{6.3}$$

Cette propriété implique que **pour tout point M situé dans un plan de symétrie, le champ magnétique est obligatoirement perpendiculaire au plan de symétrie**.

On dit que la distribution présente un plan d'anti-symétrie $\mathcal{P}'$ lorsque la distribution de courant est invariante par l'opération de symétrie de plan $\mathcal{P}'$ suivi de l'inversion du sens des courants. Dans ce cas, en un point M de l'espace, le champ magnétique ne doit pas varier lorsque l'on effectue cette transformation (principe de Curie). Détaillons la transformation

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{M} & \overset{\text{symétrie}}{\longrightarrow} & \mathrm{M'} & \overset{\text{inversion}}{\longrightarrow} & \mathrm{M'} \\ \overrightarrow{B}(\mathrm{M}) & \overset{\text{symétrie}}{\longrightarrow} & -\mathrm{sym}\,\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) & \overset{\text{inversion}}{\longrightarrow} & \mathrm{sym}\,\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) \end{array}$$

On en déduit que

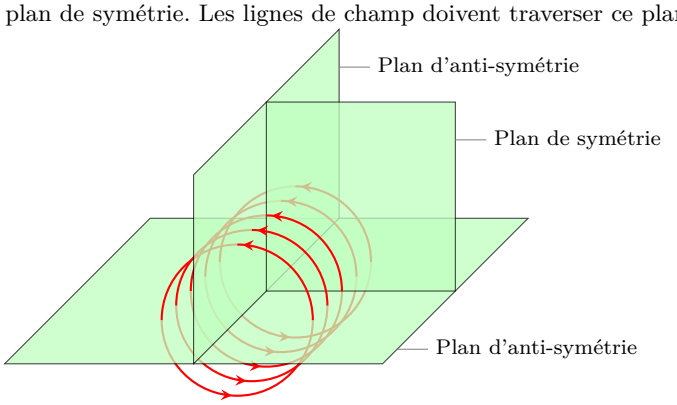
$$\boxed{\overrightarrow{B}(\mathrm{M'}) = \mathrm{sym}\,\overrightarrow{B}(\mathrm{M})} \ \heartsuit \tag{6.4}$$

Cette propriété implique que **pour tout point M situé dans un plan d'anti-symétrie, le champ magnétique est obligatoirement contenu dans ce plan**.

3. On dit également vecteur polaire.

Exercice
Identifier les plans de symétrie et d'anti-symétrie d'un solénoide cylindrique (considéré comme un ensemble de spires parallèles) et en déduire les propriétés du champ magnétique.

Tout plan contenant l'axe du solénoïde est un plan d'anti-symétrie. Les lignes de champ doivent donc appartenir à ces plans. En conséquence, l'axe du solénoïde est nécessairement une ligne de champ. Par ailleurs, le plan perpendiculaire à l'axe du solénoïde et passant par le milieu du solénoïde est un plan de symétrie. Les lignes de champ doivent traverser ce plan à angle droit.

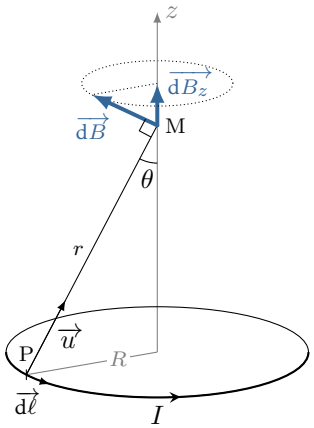


6.2 Champ créé par un dipôle magnétique

On cherche à déterminer l'expression du champ magnétique créé par un dipôle magnétique c'est-à-dire une distribution localisée de courant auquel on peut associer un moment magnétique $\overrightarrow{m}$. Nous verrons que loin du dipôle magnétique la structure du champ magnétique présente des analogies avec celui du champ électrique créé par un dipôle électrique.

6.2.1 Champ magnétique créé le long de l'axe d'une spire

Commençons par étudier le champ magnétique produit par une spire circulaire de rayon R parcouru par un courant permanent d'intensité I. Dans le cas général, le calcul fait appel aux intégrales elliptiques ; on se contente ici d'étudier l'évolution du champ magnétique le long de l'axe (Oz) de la spire.



Tout d'abord, appelons θ le demi-angle au sommet du cône formé par la spire et un point M de l'axe. D'après la loi de Biot et Savart

$$\mathrm{d}\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\wedge\overrightarrow{u}}{r^2}$$

le champ $\overrightarrow{\mathrm{d}B}(\mathrm{M})$, fait un angle $\pi/2-\theta$ avec l'axe (Oz).

Par ailleurs, tout plan contenant l'axe de la spire est un plan d'anti-symétrie (il y en a une infinité). Il en résulte que le champ magnétique est nécessairement le long de l'axe pour les points M de cet axe. Il suffit dès lors de sommer toutes les composantes verticales des champs élémentaires :

$$\mathrm{d}B_z = \mathrm{d}B\cos(\pi/2-\theta) \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2} \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

Lorsque le point P décrit le circuit fermé, l'angle θ, la distance r et l'intensité I restent constants :

$$B_z = \frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}\oint \mathrm{d}\ell = \frac{\mu_0 I\, R\sin\theta}{2r^2}$$

Finalement, compte tenu du fait que $\sin\theta = R/r$, le champ magnétique créé par une spire le long de son axe s'écrit

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = B_{\max}\sin^3\theta\,\overrightarrow{u_z} \quad \text{avec} \quad B_{\max} = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \heartsuit \tag{6.5}$$

$B_{\max}$ représente le champ créé au centre de la spire.

6.2.2 Approximation dipolaire

À partir du résultat précédent, regardons maintenant comment le champ magnétique varie loin de la boucle de courant. Sachant que $\sin\theta = R/\sqrt{R^2+z^2}$, on peut écrire le résultat précédent en fonction uniquement de la variable z :

$$B(\mathrm{M}\in Oz) = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Faisons intervenir le moment dipolaire de la spire, $m = \pi R^2 I$:

$$B(\mathrm{M}\in Oz) = \frac{\mu_0 m}{2\pi}\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Expression qui, loin de la spire, devient $(R^2+z^2 \simeq z^2)$

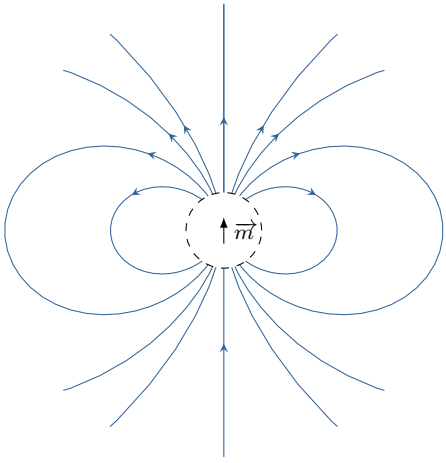
$$B(\mathrm{M}\in Oz) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{z^3} \quad \text{si} \quad z \gg R$$

Le champ magnétique décroît donc comme l'inverse du cube de la distance lorsque l'on se situe loin de la spire. Cette formule n'est pas sans rappeler l'évolution du champ électrique créé par un dipôle électrique le long de l'axe du dipole. En effet, le champ créé par un dipole électrique le long de son axe vaut, dans l'approximation dipolaire,

$$E_{\text{dipolaire}}(\mathrm{M}\in Oz) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{z^3}$$

On retrouve l'analogie déjà rencontrée au chapitre précédent :

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{m} & \leftrightarrow & \overrightarrow{p} \\ \overrightarrow{B} & \leftrightarrow & \overrightarrow{E} \\ \dfrac{\mu_0}{4\pi} & \leftrightarrow & \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \end{bmatrix}$$



On peut montrer que cette analogie fonctionne dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire dès que l'on se trouve loin du dipôle magnétique. **Le champ magnétique créé par un dipole magnétique a la même structure que le champ électrique créé par un dipôle dès lors que l'on se place dans l'approximation dipolaire**. On a

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{u_r})\,\overrightarrow{u_r} - \overrightarrow{m}\right]$$

6.2.3 Origines du magnétisme

Géomagnétisme

La Terre produit un champ magnétique de l'ordre de 10 μT. Ce champ est de nature dipolaire et peut s'interpréter comme lié à l'existence d'un dipôle magnétique au centre de la Terre de moment

magnétique $m \approx 10^{23}$ A.m^2 et dont l'axe est quasi-aligné avec l'axe des pôles. Le dipôle pointe vers le Sud géographique de telle sorte qu'une boussole à la surface de la Terre indiquera le Nord Géographique. Autrement dit, le Nord géographique est un pôle sud magnétique.

En réalité, l'axe nord-sud magnétique n'est pas confondu avec l'axe Sud-Nord géographique. Il est incliné de 11,5° et subit quelques fluctuations journalières. Ce fait reste encore énigmatique pour les théoriciens. Il est des astres où la configuration est encore plus exotique : par exemple, sur Neptune l'axe fait 90° avec l'axe de rotation ! L'étude de l'évolution du magnétisme terrestre

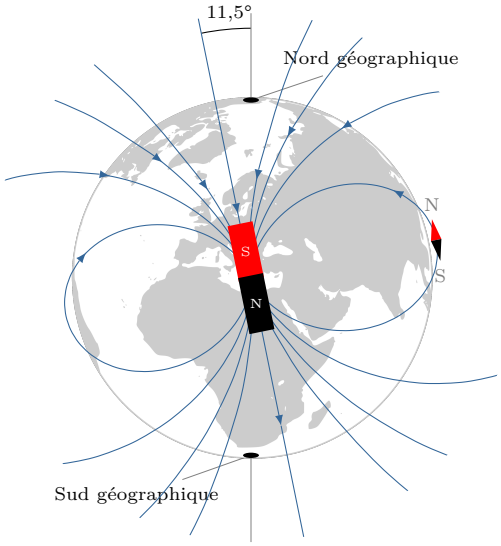
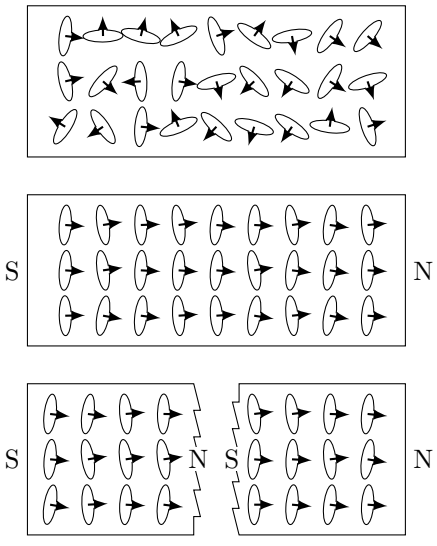


FIGURE 6.6 – Champ magnétique terrestre

(paléomagnétisme) soulève encore quelques énigmes. Par exemple l'inversion du champ magnétique terrestre ne se produit pas régulièrement (la dernière remonte à 800 000 ans) alors que le champ magnétique solaire s'inverse lui à une cadence régulière ; tous les 11 ans.

Le magnétisme des aimants

C'est Ampère qui, le premier, pressentit que le magnétisme des aimants tenait son origine dans l'existence de minuscules boucles de courants au sein des molécules de la matière. Il a fallut attendre les découvertes du XX^e siècle sur l'atome pour confirmer l'intuition d'Ampère. En effet, de nos jours, on sait que certains atomes (ou molécules) possèdent un moment dipolaire magnétique du fait de leur structure électronique. Dans un matériau non aimanté, les moments dipolaires sont orientés de façon aléatoires de sorte que les effets s'annihilent. C'est la situation que l'on rencontre quand le matériau est non aimanté ou trop chaud, l'agitation thermique étant alors responsable de ce désordre. En revanche, dans un aimant, les moments microscopiques tendent à s'aligner grâce à une interaction d'origine quantique (on parle de couplage ferromagnétique) et parce que l'agitation thermique n'est pas trop importante. Dans ce cas, l'aimant présente un moment magnétique macroscopique suffisamment important pour créer un fort champ magnétique. Bien entendu, lorsqu'on chauffe l'aimant au delà d'une certaine



température (dite température critique), l'ordre ferromagnétique est rompu et l'aimant perd son aimantation.

Cette description permet de comprendre une expérience qui remonte au XIII^{e} siècle : l'expérience de l'aimant brisée. Si l'on coupe un aimant en deux, on se retrouve avec deux nouveaux aimants possédant chacun un pôle nord et un pôle sud. Autrement dit, il est impossible d'isoler un seul pôle magnétique.

Relation entre structure électronique et magnétisme
Le magnétisme des atomes est essentiellement dû au mouvement électronique. En effet, imaginons un électron de masse m_e décrivant une orbite circulaire de rayon r à la vitesse v autour du noyau avec lequel il est en interaction. On peut considérer qu'il s'agit d'une boucle de courant de rayon r et de courant $I = e/T$ où T représente la période orbitale du mouvement. Sachant que $T = 2\pi r/v$, le moment magnétique de cette « boucle de courant » vaut donc

$$m = \pi r^2 I = \pi r^2 \frac{ev}{2\pi r} = \frac{evr}{2}$$

L'électron ainsi en mouvement présente également un moment cinétique orbital $L_O = m_e vr$ de sorte qu'il y a proportionnalité entre le moment magnétique et le moment orbital.

$$m = \gamma L \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{e}{2m_e} \tag{6.6}$$

Le facteur γ porte le nom de facteur gyromagnétique. On peut montrer que tout modèle classique conduit à ce résultat quel que soit le mouvement de l'électron. Le noyau présente également un moment magnétique mais sa masse étant plus de mille fois supérieure à celle de l'électron, le facteur gyromagnétique nucléaire est négligeable devant celui de l'électron de sorte que le moment magnétique de l'atome est essentiellement dû au mouvement des électrons.
La description classique que l'on vient de voir n'est hélas pas en accord avec l'expérience et seule une description quantique parvient à appréhender complètement les phénomènes magnétiques. Par exemple, on s'est rendu compte que l'électron possédait un moment cinétique propre dit **moment cinétique de spin** L_s. Pour prendre une image classique, l'électron est comme une petite boule chargée en rotation sur elle même et possède donc également un moment magnétique lié à son spin. Là s'arrête l'analogie classique, car la relation entre le moment magnétique et le moment cinétique de spin ne vérifie pas l'équation (6.6). On obtient plutôt

$$m_s = g\gamma L_s \quad \text{avec} \quad g \simeq 2 \tag{6.7}$$

avec g un paramètre sans dimension, appelé facteur de Landé, dont la valeur expérimentale est en accord avec les calculs d'électrodynamique quantique.
Finalement, on retiendra que les propriétés magnétiques de l'atome sont essentiellement gouvernées par la façon dont les moments cinétiques orbitaux et de spin des électrons se composent.

Deuxième partie

ÉLECTROCINÉTIQUE

7 – ÉTUDE DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES

Comment courants et potentiels électriques se répartissent au sein d'un circuit électrique ? C'est à cette question que ce cours entend répondre, sachant qu'on limitera notre propos aux réseaux électriques linéaires. En effet, ces réseaux ont le bon goût de mener à des équations analytiquement solubles.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

http://femto-physique.fr/electromagnetisme/etude_des_reseaux_electriques.php

Sommaire

7.1 Lois de l'électrocinétique 71
7.1.1 Introduction 71
7.1.2 Loi des nœuds 71
7.1.3 Loi des mailles 72
7.1.4 Puissance reçue par un dipole électrique 73
7.2 Phénomènes résistifs 74
7.2.1 Loi d'ohm - effet Joule 74
7.2.2 Association de résistances 75
7.2.3 Ponts diviseurs 76
7.3 Modélisation linéaire d'un dipôle actif 77
7.3.1 Source de tension 77
7.3.2 Source de courant 78
7.3.3 Équivalence Thévenin-Norton 79
7.3.4 Récepteur actif 79
7.3.5 Loi de Pouillet 80
7.3.6 Méthodes de résolution 81
7.4 Phénomènes capacitifs 82
7.4.1 Rappels 82
7.4.2 Association de condensateurs 83
7.4.3 Décharge d'un condensateur 84
7.5 Phénomène d'auto-induction 85
7.5.1 Introduction à l'induction magnétique 85
7.5.2 Auto-induction 87
7.5.3 Énergie emmagasinée dans une bobine 87
7.5.4 Circuit R-L 88

7.1 Lois de l'électrocinétique

Les lois de l'électrocinétique ou **lois de Kirchhoff**[1] se résument en deux lois : la *loi des nœuds* et *la loi des mailles*.

7.1.1 Introduction

Un **réseau électrique** (ou circuit électrique) est un ensemble d'éléments présentant des propriétés électriques, reliés entre eux par des conducteurs que l'on considérera parfaits (conductivité infini). Les lois de l'électricité permettent de trouver la façon dont les courants et les potentiels électriques se répartissent au sein de ce circuit.

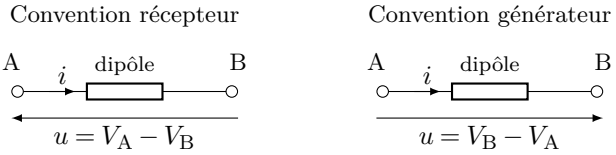
Lorsque les grandeurs électriques ne varient pas dans le temps, on parle de **régime continu** ; le **régime variable** désigne la situation contraire. En général, les grandeurs électriques stationnaires sont notées en majuscule (tension U et intensité du courant I) alors que les grandeurs variables sont en minuscules ($u(t)$ et $i(t)$).

En régime variable, les fluctuations de courant se propagent à une vitesse proche de la vitesse de la lumière. Pour des circuits de taille raisonnable, la durée de propagation τ est très petite devant le temps caractéristique T des fluctuations (période du signal s'il est périodique). Il est alors légitime de négliger τ devant T ; c'est ce qu'on appelle l'*approximation des régimes quasi-stationnaires*.

Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS)
Nous admettrons que les lois des régimes permanents restent valables en régime variable si l'on peut considérer les phénomènes de propagation négligeables. Notamment, dans une branche d'un circuit, à un instant donné, le courant a la même intensité en tout point.

Un **dipôle électrocinétique** est une partie d'un circuit qui peut être reliée au reste du circuit par deux fils. On décrit le comportement d'un dipôle par sa relation courant-tension ($i = f(u)$) dans une convention précisée. Il en existe deux :

- dans la convention récepteur, si le courant algébrique est orienté dans le sens AB, alors $u = V_A - V_B$;
- dans la convention générateur, si le courant est orienté dans le sens AB, alors $u = V_B - V_A$.



Enfin, nous restreindrons notre propos aux réseaux constitués seulement de dipôles électrocinétiques linéaires, c'est-à-dire ceux dont la relation entre u et i est soit affine ($i = a \times u + b$), soit intégro-différentielle.

7.1.2 Loi des nœuds

Dans chaque branche d'un réseau électrique, on définit un sens positif (le choix est arbitraire !) du courant et une intensité algébrique i . Si $i > 0$, le courant circule dans le sens positif ; si $i < 0$, le courant circule dans le sens opposé.

1. **Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)** : physicien allemand qui énonça les lois relatives au courant électrique dans les circuits alors qu'il était encore étudiant. On lui doit surtout des avancées en spectroscopie.

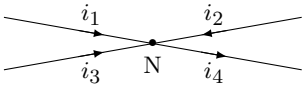
Un nœud est la rencontre d'au moins trois conducteurs électriques. Considérons n branches de conducteurs liées par un nœud N. Définissons i_k, l'intensité algébrique du courant de la k^{e} branche. La loi des nœuds traduit la conservation de la charge en régime stationnaire et exprime le fait que la charge ne peut pas s'accumuler en N : le courant électrique qui arrive en N doit être compensé par le courant qui sort. Cette loi, rigoureusement vérifiée en régime continu, est admise en régime variable dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

Loi des nœuds
En chaque nœud d'un circuit, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \, i_k = 0 \tag{7.1}$$

où $\epsilon_k = +1$ quand le courant est entrant et où $\epsilon_k = -1$ dans le cas contraire.

Exemple : On considère le schéma suivant :



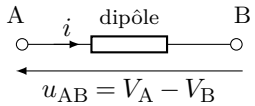
la loi des nœuds (7.1) exprimée en N donne

$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0 \quad \text{soit} \quad i_4 = i_1 + i_2 + i_3$$

ce qui traduit bien le fait que le courant qui arrive en N est égale au courant qui en sort.

7.1.3 Loi des mailles

Le transport électrique est assuré grâce aux forces électrostatiques. On peut dès lors définir un potentiel électrique en chaque point du circuit. Lorsque le potentiel électrique est le même partout, le réseau est à l'équilibre et n'est le siège d'aucun courant électrique. En revanche, lorsque le potentiel électrique n'est plus uniforme, le conducteur n'est plus à l'équilibre ce qui génère un courant électrique (qui tente de rétablir l'équilibre). Aux extrémités d'une branche il existe alors une tension qui dépend du courant électrique et de la nature du dipôle traversé par ce courant. Il est traditionnel de représenter une tension $u_{\text{AB}} = V_A - V_B$ par une flèche allant de B vers A.



Les tensions qui règnent dans un circuit obéissent à quelques contraintes physiques. En effet, si l'on parcourt un circuit fermé (on parle de maille) en partant d'un nœud N pour revenir à ce même nœud, on doit trouver une tension nulle en vertu du caractère conservatif du champ électrique ($\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0$). Autrement dit, si l'on décompose le circuit $\mathcal{C}$ en n branches adjacentes on aura :

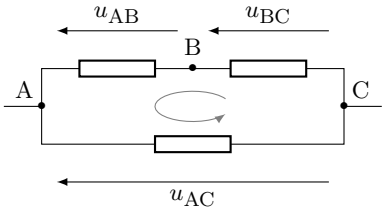
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 0$$

où u_k est la tension qui règne aux extrémités de la k^{e} branche. Cette loi est à appliquer si toutes les tensions sont orientées dans le même sens, ce qui n'est pas toujours la cas à cause des différentes conventions choisies pour les dipôles, c'est pourquoi on retiendra la règle suivante :

Loi des mailles
Prenons une maille et choisissons arbitrairement un sens de parcours. Visitons toutes les branches de la maille et associons un coefficient $\epsilon_k = +1$ à la tension rencontrée lorsqu'elle est orientée (sa flèche représentative) dans le sens de parcours et un coefficient $\epsilon_k = -1$ lorsque la tension rencontrée est orientée dans l'autre sens. La loi des mailles se traduit alors par

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \, u_k = 0 \tag{7.2}$$

Exemple : Dans le circuit ci-dessous, appliquons la loi des mailles en parcourant la maille dans le sens indiqué.



On trouve

$$1 \times u_{BC} + 1 \times u_{AB} - 1 \times u_{AC} = 0$$

soit

$$u_{AC} = u_{AB} + u_{BC}$$

On retrouve d'ailleurs une loi identique à celle de Chasles propre aux vecteurs.

Remarques :

- Rappelons qu'il existe une indétermination du potentiel ; ceci reste vrai au sein d'un réseau électrique. Cependant, une convention souvent rencontrée consiste à poser l'origine du potentiel au niveau du pôle - de l'alimentation. Ce potentiel de référence est appelée **masse du circuit**.
- Un équipement sous tension présente, en général, une connexion physique avec la terre. Elle permet de protéger l'utilisateur et également d'évacuer les courants induits par la foudre. Cependant, il ne faudrait pas confondre ligne de terre et ligne de masse, car le potentiel de la terre n'est pas nécessairement constant et sa fonction est uniquement liée à la sécurité.

ligne de masse

ligne de terre

7.1.4 Puissance reçue par un dipole électrique

On appelle $\mathcal{P}(t)$ la puissance électrique reçue à l'instant t par un dipôle électrocinétique. La puissance électrique se mesure en **watt** (symbole : W) en hommage à James Watt [2] et on rappelle que

$$1\,\mathrm{W} \equiv 1\,\mathrm{J.s^{-1}}$$

Entre t et $t + \mathrm{d}t$, la quantité de charge $\mathrm{d}q = i(t)\,\mathrm{d}t$ arrive en une extrémité du dipôle (point A) pendant que la même quantité – nous sommes en régime stationnaire ou quasi-stationnaire – en sort par l'autre extrémité (point B). Cette quantité de charge possède une énergie électrique $\mathcal{E}_\mathrm{p}(\mathrm{A}) = \mathrm{d}qV_\mathrm{A}$ en A et $\mathcal{E}_\mathrm{p}(\mathrm{B}) = \mathrm{d}qV_\mathrm{B}$ en B. Remarquons qu'entre A et B l'énergie des charges n'a pas changé du fait que la distribution des charges et du potentiel est la même entre t et $t + \mathrm{d}t$.

2. **James Watt (1736-1819)** : ingénieur britannique, dont les améliorations sur la machine à vapeur furent une étape clé dans la révolution industrielle.

Autrement dit, d'un point de vue énergétique, tout se passe comme si l'on avait transporté la charge $\mathrm{d}q$ de A en B. Pendant ce transport la charge perd une énergie potentielle $\mathrm{d}qV_\mathrm{A} - \mathrm{d}qV_\mathrm{B}$ qu'elle cède intégralement au dipôle. Celui-ci reçoit donc une quantité d'énergie

$$\delta W = \mathrm{d}qV_\mathrm{A} - \mathrm{d}qV_\mathrm{B} = i(t)\,u_{AB}(t)\,\mathrm{d}t$$

La puissance électrocinétique reçue (l'énergie reçue par unité de temps) par un dipole D à l'instant t, soumis à une tension $u(t)$ et traversé par un courant d'intensité $i(t)$ vaut, *en convention récepteur*,

$$\mathcal{P}(t) = u(t)\,i(t) \tag{7.3}$$

Si $\mathcal{P}(t) > 0$, le dipôle absorbe effectivement, à l'instant t, de l'énergie électrique. On dit que le dipôle a un caractère **récepteur**. Cette énergie reçue par le dipôle est soit stockée, soit convertie sous une autre forme (effet Joule dans une résistance, énergie mécanique dans un moteur).

Si $\mathcal{P}(t) < 0$, le dipôle fournit effectivement de l'énergie électrique ; on dit que le dipôle à un caractère **générateur** (batterie en fonctionnement par exemple).

TABLE 7.1 – Ordres de grandeur

électronique	lampe de poche	consommation des français en hiver	centrale électrique	moteur TGV
μW-mW	W	100 GW	GW	MW

7.2 Phénomènes résistifs

7.2.1 Loi d'ohm - effet Joule

Comme on l'a vu précédemment (*cf.* femto-physique.fr/electromagnetisme/conducteurs_electriques.php), un conducteur ohmique obéit à la loi d'Ohm

$$u(t) = R\,i(t) \quad \text{[Convention récepteur]}$$

où R désigne la résistance du conducteur ohmique dont la valeur dépend de la géométrie et de la conductivité du matériau conducteur. Rappelons que R s'exprime en ohm (symbole Ω). La

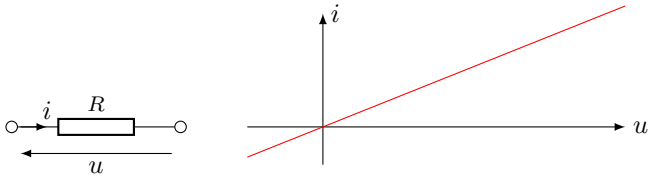


FIGURE 7.1 – Schéma et caractéristique d'un conducteur ohmique.

caractéristique $i = f(u)$ est donc une droite passant par l'origine.

Un circuit uniquement composé de résistances ne peut pas produire de courant. On dit que le conducteur ohmique est un *dipôle linéaire passif*. Par exemple, si l'on branche deux résistances ensemble, la loi des mailles donne

$$u_1 + u_2 = 0$$

soit

$$R_1\,i + R_2\,i = 0 \quad \Longrightarrow \quad i = 0$$

Aucun courant ne circule et par conséquent tous les conducteurs sont au même potentiel. On retrouve une des propriétés des conducteurs à l'équilibre.

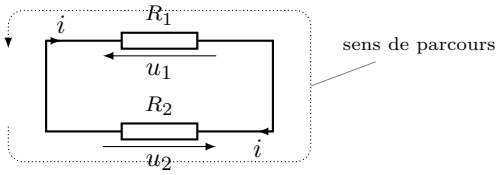


FIGURE 7.2 – Réseau constitué de deux résistances

La puissance reçue par un conducteur ohmique vaut

$$\mathcal{P} = u\,i = R i^2 > 0 \quad \heartsuit \tag{7.4}$$

Le conducteur ne peut que recevoir de l'énergie électrique, sans pouvoir en fournir. On parle alors de *récepteur* électrique. En revanche cette énergie électrique est convertie essentiellement sous forme de chaleur si le conducteur n'est pas thermiquement isolé. En effet, si le conducteur est maintenu à température et pression constantes, le premier principe de la thermodynamique donne, pendant la durée τ :

$$\Delta H = Q_P + W_{\text{elec}} = Q_{\text{P}} + \int R i^2 \,\mathrm{d}t = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_p = -\int R i^2 \,\mathrm{d}t$$

Cette dissipation de l'énergie électrique sous forme de chaleur porte le nom d'*effet Joule*. Cet effet est mis à profit dans les bouilloires électriques par exemple.

> **Remarque** : Notez qu'en général le conducteur voit sa température varier, ce qui fait augmenter son enthalpie ($\Delta H = \int mc_p \,\mathrm{d}T$). Dans ce cas, une partie de l'énergie électrique sert à augmenter l'énergie interne du conducteur et à le dilater.

7.2.2 Association de résistances

Tout dipôle constitué uniquement de résistances équivaut à une résistance équivalente R_{eq}. Intéressons-nous à deux configurations simples.

Résistances en série

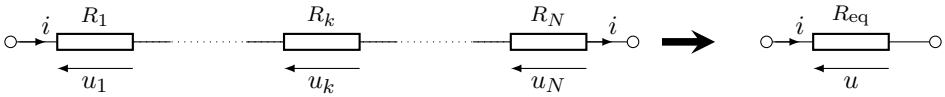


FIGURE 7.3 – Conducteurs ohmiques en série.

On dit que des résistances sont en série lorsqu'elles sont traversées par le même courant électrique. Appelons i l'intensité du courant. On a

$$u = R_{\text{eq}}\, i = \sum_{k=1}^{N} u_k = i \sum_{k=1}^{N} R_k$$

Par conséquent, on obtient

$$R_{eq} = \sum_k R_k \quad \heartsuit \tag{7.5}$$

Résistances en parallèle

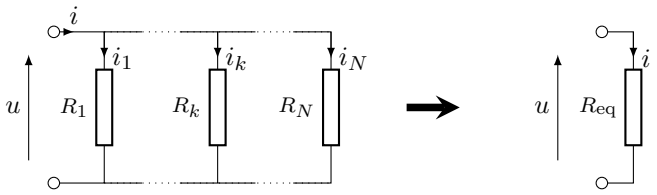


FIGURE 7.4 – Conducteurs ohmiques en parallèle.

On dit que des résistances sont associées en parallèle lorsqu'elles sont soumises à la même tension. Appelons u la tension commune. On a

$$i = \frac{u}{R_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^{N} i_k = u \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}$$

On trouve donc

$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{k} \frac{1}{R_k}} \quad \heartsuit \tag{7.6}$$

On pourra retenir par exemple que :

- deux résistances en parallèle équivalent à une résistance $R_{\text{eq}} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$;
- N résistances identiques R en parallèle équivalent à un conducteur de résistance R/N.

7.2.3 Ponts diviseurs

Considérons deux résistances R_1 et R_2 *en série* soumises à une tension globale u. En vertu de la loi

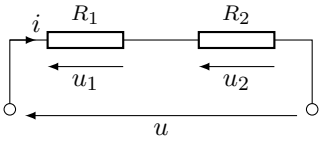


FIGURE 7.5 – Pont diviseur de tension

des mailles, on a $u = u_1 + u_2 = (R_1 + R_2)i$. La tension aux bornes de chaque résistance $u_k = R_k i$ est alors une fraction de la tension u

$$\boxed{u_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2} u \qquad k = 1 \text{ ou } 2} \quad \heartsuit \tag{7.7}$$

On parle alors de montage *diviseur de tension.*

On considère maintenant deux résistances R_1 et R_2 *en parallèle* alimentées par un courant global i. Définissons les conductances $G_k = 1/R_k$, exprimées en siemens (symbole : S). Le courant traversant chacune des résistances a pour intensité $i_k = G_k u$ et $u = (G_1 + G_2)i$. En conséquence, on obtient

$$\boxed{i_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2} i \qquad k = 1 \text{ ou } 2} \quad \heartsuit \tag{7.8}$$

Le courant se répartie au prorata des conductances et l'on parle de montage *diviseur de courant.*

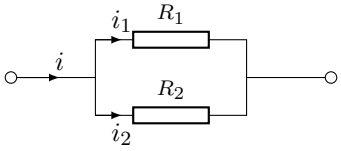
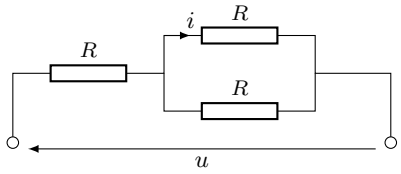


FIGURE 7.6 – Pont diviseur de courant

Exercice
On considère le montage ci-dessous. Calculer l'intensité du courant i.



Les deux résistances en parallèle sont équivalentes à une résistance de valeur $R/2$. La tension qui règne aux bornes de ces deux résistances est donnée par la formule du diviseur de tension :

$$u' = \frac{R/2}{R/2+R}u = \frac{1}{3}u$$

On en déduit le courant i à partir de la loi d'ohm : $u' = Ri$ soit $i = u/(3R)$.

7.3 Modélisation linéaire d'un dipôle actif

Contrairement aux dipôles passifs, les dipôles actifs produisent une tension en circuit ouvert. On distingue les sources (piles, alimentation stabilisée, batteries en utilisation,...) et les récepteurs (électrolyseurs, batteries en charge, moteurs électriques).

7.3.1 Source de tension

Une source de tension permet aux charges de « remonter » le potentiel grâce à l'existence d'un champ électromoteur au sein de la source. Ce champ électromoteur produit une tension, dite force électromotrice (f.é.m) que nous noterons e.

La caractéristique d'une source de tension idéale s'écrit en *convention générateur* :

$$u = e \qquad \forall i$$

où e est la *force électromotrice* (f.é.m) de la source de tension.

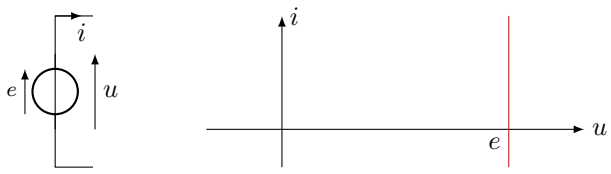


FIGURE 7.7 – Source idéale de tension : schéma et caractéristique

Pour tenir compte des pertes par effet Joule d'une source de tension, on modélise la source par une source idéale en série avec une résistance r dite *résistance interne*. La caractéristique s'écrit alors :

$$u = e - ri \quad \heartsuit \tag{7.9}$$

Il ressort de cette caractéristique que la source de tension acquiert un comportement quasi-idéal à

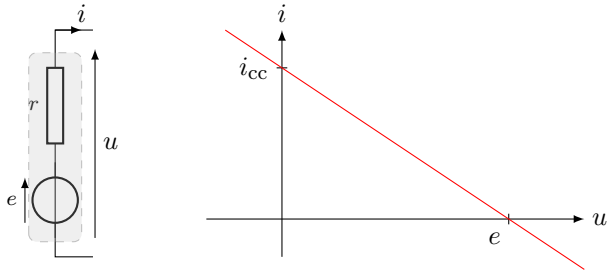


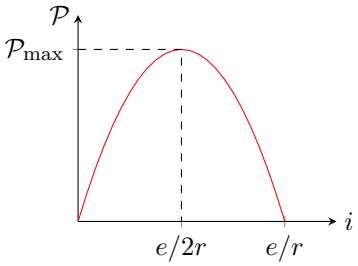
FIGURE 7.8 – Source réelle de tension : schéma et modélisation linéaire.

la condition que $ri \ll e$: le courant débité par la source doit rester faible. C'est ce que l'on obtient lorsque que l'on branche un voltmètre aux bornes de la source : la résistance interne du voltmètre étant très grande, le courant débitée est quasi-nul de sorte que le voltmètre indique la f.é.m de la source. Par ailleurs, lorsque l'on court-circuite la source en reliant ses deux bornes ($u = 0$), on trouve un courant de court-circuit

$$i_{cc} = e/r$$

Du point de vue énergétique, la puissance délivrée par la source de tension vaut $\mathcal{P} = u\,i = ei - ri^2$. Ainsi, la puissance atteint une valeur maximale lorsque $i = e/2r$. Une source réelle de tension délivre donc une puissance maximale

$$\mathcal{P}_{max} = \frac{e^2}{4r}$$



7.3.2 Source de courant

Le rôle d'une source de courant est d'imposer un courant constant indépendamment de la tension qui règne à ses bornes. Une source de courant idéale aura la caractéristique suivante :

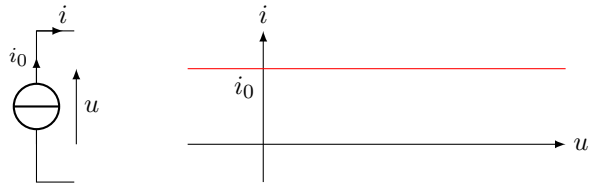


FIGURE 7.9 – Source de courant idéale : schéma et caractéristique.

$$i = i_0 \qquad \forall u$$

où i_0 désigne le *courant électromoteur* (c.é.m).

Pour tenir compte des pertes par effet Joule d'une source de courant réelle, on la modélise par une source idéale en parallèle avec une *conductance interne* g. La caractéristique s'écrit alors :

$$i = i_0 - g\,u \quad \text{avec} \quad g = \frac{1}{r}$$

où g est la conductance interne (r la résistance interne). On notera qu'une source de courant se rapproche d'une source de courant idéale quand sa conductance interne $g \to 0$ ($r \to \infty$).

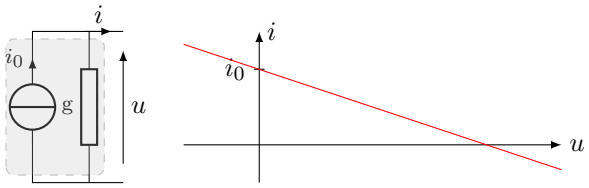
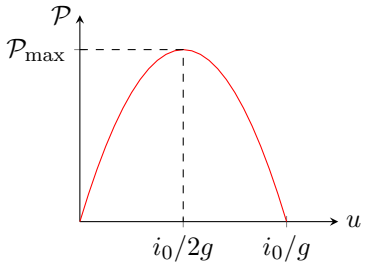


FIGURE 7.10 – Source réelle de courant : schéma et caractéristique.

La puissance fournie par une source de courant réelle vaut $\mathcal{P} = ui = ui_0 - gu^2$. Suivant le dipôle que charge la source de courant, la tension et donc la puissance délivrée varie. La courbe ci-contre montre que lorsque $u = i_0/2g$ la puissance atteint une valeur maximale

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{{i_0}^2}{4g}$$

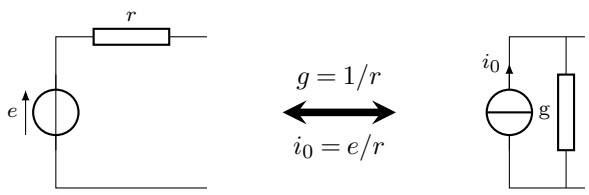


7.3.3 Équivalence Thévenin-Norton

Considérons une source de tension réelle dont la modélisation linéaire est donnée par $u = e - ri$. Cette caractéristique peut se ré-écrire $i = e/r - gu$ avec $g = 1/r$. En d'autres termes, une source de tension réelle peut s'interpréter comme une source de courant de c.é.m $i_0 = e/r$ et de conductance $g = 1/r$. Ainsi, toute source linéaire présente deux représentations possibles :

- la modélisation de Thévenin correspondant à une source de tension idéale en série avec une résistance ;
- la modélisation de Norton correspondant à une source de courant idéale en parallèle avec une conductance.

On passe d'une représentation à une autre en retenant l'équivalence Thévenin-Norton suivante :



7.3.4 Récepteur actif

Étudions le cas d'une batterie chimique. On distingue deux comportements : la décharge ou la charge. Lorsque la batterie se décharge, elle est alors source d'énergie et est modélisée par une source de tension de f.é.m e et de résistance interne r. On a en convention générateur

$$u = e - ri \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = ei - ri^2 > 0$$

En fonctionnement générateur, la puissance fournie est positive et le sens du courant est dictée par la polarité de la source. En revanche, lorsque la batterie est en charge, le courant est dans l'autre sens. Dans ce cas, le dipôle reçoit de la puissance : on dit qu'il s'agit d'un récepteur actif et e est désigné par le terme *force contre-électromotrice* (f.c.é.m). En convention récepteur, on écrira

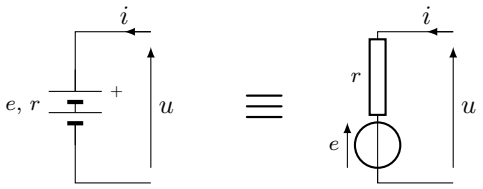


FIGURE 7.11 – Batterie en charge.

donc

$$u = e + ri$$

et la puissance fournie à la batterie vaut

$$\mathcal{P} = ei + ri^2$$

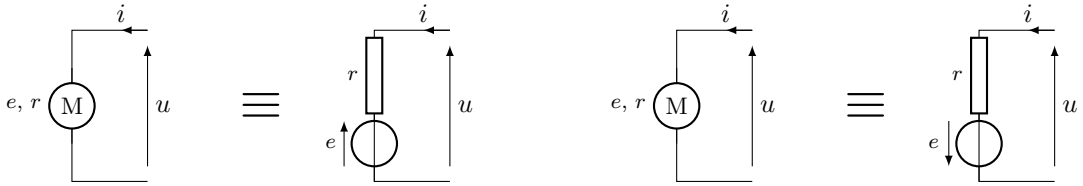
Une partie de cette puissance (ri^2) est dissipée par effet joule et l'autre partie ($e\,i$) est convertie en énergie chimique. On peut d'ailleurs définir un rendement de conversion

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{convertie}}}{\mathcal{P}_{\text{fournie}}} = \frac{e}{e + ri}$$

Finalement, une batterie est une source de tension qui peut fonctionner, soit en générateur, soit en récepteur, la polarité étant fixé par la borne + de la batterie. On parle alors de *récepteur réversible*. Les accumulateurs, les électrolyseurs ont ce comportement.

Il existe cependant des dipôles actifs dont le comportement est toujours récepteur quel que soit le sens du courant. La polarité de la f.c.é.m est toujours orientée à contre sens du courant. On parle de *récepteur non réversibles* (ou non polarisés). Le moteur à courant continu en est un exemple.

Cas ou $i > 0$: $u = e + ri$ Cas où $i < 0$: $u = -e + ri$



7.3.5 Loi de Pouillet

Imaginons une maille constituée de dipôles actifs (en représentation de Thévenin) et de résistances. Appelons R la somme de toutes les résistances (résistances internes inclues). Imposons un sens positif du courant et notons i l'intensité algébrique du courant qui circule dans la maille. Notons e_k les f.é.m (orientées dans le sens positif) et e'_k les f.c.é.m (orientés dans le sens contraire). La loi des mailles permet d'écrire

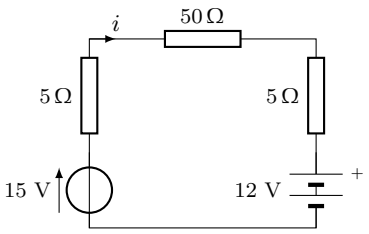
$$\sum_k e_k - \sum e'_k - Ri = 0$$

Ce qui donne la loi connue sous le nom de loi de Pouillet :

$$i = \frac{\sum_k e_k - \sum_{k'} e'_k}{R} \quad \heartsuit \tag{7.10}$$

Exercice

Une source de tension continue, de f.é.m $e = 15$ V, charge une batterie de f.c.é.m $e' = 12$ V. Déterminer le courant de charge i à l'aide de la loi de Pouillet.



La loi de Pouillet donne

$$i = \frac{e - e'}{R} \quad \text{soit} \quad i = \frac{15 - 12}{50 + 5 + 5} = 50\,\text{mA}$$

7.3.6 Méthodes de résolution

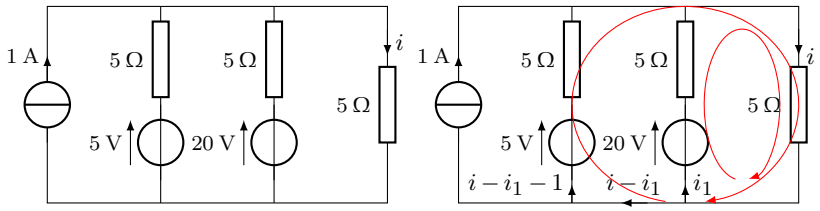
Dans un réseau constitué de b branches et n nœuds, il y a $N = b - n + 1$ courants indépendants. En effet, les b courants circulant dans les b branches vérifient $n - 1$ relations (lois des nœuds). Il nous faut donc N relations pour déterminer ces inconnues. Ces relations sont obtenues en appliquant la loi des mailles dans N mailles indépendantes associées aux caractéristiques des dipôles. On obtient alors un système d'équations à résoudre.

Méthodologie

1. Parcourir toutes les branches du réseau en définissant les courants algébriques et en appliquant le plus possible la loi des nœuds à chaque fois que l'on rencontre un nœud.
2. Compter le nombre N de courants inconnues puis choisir N mailles avec un sens de parcours.
3. Écrire N lois des mailles en utilisant les caractéristiques des dipôles. Notez que si une branche contient une source de courant, l'intensité électrique dans cette branche est alors déterminée, mais la tension aux bornes de la source est alors une inconnue.
4. Résoudre le système d'équations.

Cette méthode présente l'avantage de déterminer toutes les grandeurs électriques et s'applique à tous les réseaux électriques. Son inconvénient majeur étant qu'elle nécessite de résoudre un système de N équations même si l'on ne cherche qu'une seule grandeur électrique. Le risque d'erreur de calcul peut devenir important.

Exemple : À l'aide des lois de Kirchhoff, déterminons l'intensité du courant i dans le circuit ci-dessous.



Commençons par définir tous les courants. Appelons i_1 le courant qui traverse le dipôle (20 V, 5 Ω). En parcourant tout le réseau, on s'aperçoit qu'il n'y a que deux courants inconnues : i et i_1 (notez qu'il y a une source de courant qui impose la valeur de l'intensité du courant dans une branche). Il suffit donc de deux relations pour les déterminer. On choisira les mailles représentées en couleur sur la figure. La loi des mailles donne alors

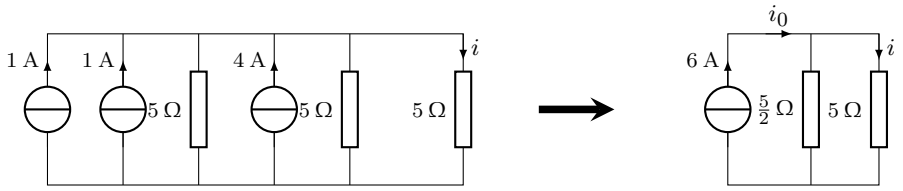
$$\begin{cases} 20 - 5i_1 - 5i = 0 \\ 5 - 5(i - i_1 - 1) - 5i = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5i_1 + 5i = 20 \\ -5i_1 + 10i = 10 \end{cases}$$

En sommant les deux relations, on trouve $15i = 30$, soit $i = 2$ A.

Pour remédier à ce défaut, on peut utiliser de façon judicieuse l'équivalence électrique entre une source de tension réelle et une source de courant réelle ainsi que l'association des résistances. Cela

permet de simplifier une partie d'un réseau électrique, et de diminuer le nombre de mailles, quand le but est de calculer le courant dans une branche particulière.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent en utilisant l'équivalence Thévenin-Norton.



Après plusieurs simplifications, on aboutit à un simple diviseur de courant. La formule du diviseur donne alors

$$i = \frac{1/5}{2/5 + 1/5} \times 6 = 2\,\text{A}$$

7.4 Phénomènes capacitifs

7.4.1 Rappels

On a vu dans le chapitre consacré aux conducteurs qu'un condensateur soumis à une tension électrique constante U accumule au niveau de ses armatures des charges électriques de signe opposé (Q et $-Q$) telles que $Q = CU$. On admettra que dans le cadre de l'ARQS un condensateur idéal répond à cette loi. On a donc en convention récepteur

$$q(t) = C\,u(t) \quad \Longrightarrow \quad i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{[Convention récepteur]} \quad \heartsuit \tag{7.11}$$

où C se mesure en farad (symbole : F). La relation étant linéaire, le condensateur est un dipôle linéaire.

Un condensateur réel s'écarte un peu de l'idéalité pour deux raisons essentielles.

1. La tension est en général limitée. En effet, il existe un champ électrique qu'il ne faut pas dépasser au risque de détruire le diélectrique placée entre les armatures du condensateur (existence d'un champ disruptif).
2. Il existe un courant de fuite à travers le diélectrique du fait de la conductivité finie de ce dernier. Par exemple, lorsqu'un condensateur chargé est abandonné en circuit ouvert, on constate que sa charge diminue au cours du temps. Pour modéliser cette fuite, on introduit la notion de **résistance de fuite** R_f. Son ordre de grandeur varie entre le MΩ et la centaine de MΩ.

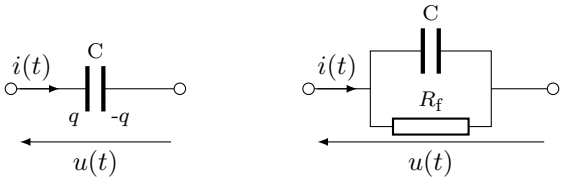


FIGURE 7.12 – Condensateurs idéal et réel.

Énergie emmagasinée dans un condensateur

On rappelle qu'un condensateur idéal stocke une énergie électrique

$$W_E = \frac{1}{2}q\,u = \frac{1}{2}C\,u^2$$

Le condensateur chargé agit comme un réservoir d'énergie qu'il peut fournir au reste du circuit. La puissance que reçoit un condensateur idéal s'écrit

$$\mathcal{P} = u\,i = C\,u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W_E}{\mathrm{d}t}$$

Lorsque l'énergie stockée décroit, $\mathcal{P} < 0$: le condensateur se décharge en fournissant de l'énergie au reste du circuit, agissant ainsi comme un générateur.

7.4.2 Association de condensateurs

Association en parallèle

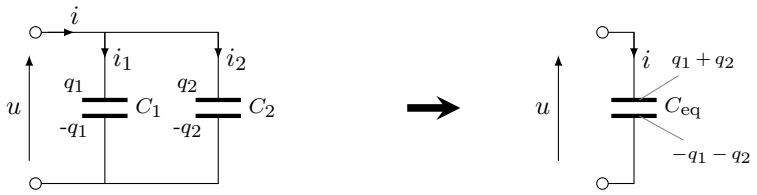


FIGURE 7.13 – Deux condensateurs associés en parallèle.

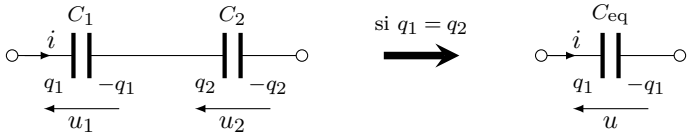
Soient deux condensateurs de capacité C_1 et C_2 montés en parallèle. On suppose que ces condensateurs sont suffisamment éloignés pour pouvoir négliger toute influence mutuelle (ce qui est fréquemment réalisé). Exprimons l'énergie emmagasinée :

$$W_E = \frac{1}{2}C_1u^2 + \frac{1}{2}C_2u^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)u^2$$

Par conséquent, l'ensemble est équivalent à un condensateur de capacité $C_{\mathrm{eq}} = C_1 + C_2$ soumis à la tension commune u. Cette propriété se généralise aisément : N condensateurs montés en parallèle et sans influence mutuelle équivalent à un condensateur de capacité :

$$\boxed{C_{\mathrm{eq}} = \sum_{i=1}^{N} C_i} \quad \heartsuit \tag{7.12}$$

Association en série



Considérons deux condensateurs de capacité C_1 et C_2 montés en série. Appelons i l'intensité du courant qui les traverse. La conservation de la charge implique que

$$i = \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad q_2 - q_1 = \mathrm{C^{te}}$$

la quantité de charge $q_2 - q_1$ représente la charge répartie sur la liaison conductrice entre les deux condensateurs. Supposons la liaison initialement neutre : $q_1 = q_2 = q$. Dans ce cas, l'ensemble

est équivalent à un condensateur portant une charge q et une capacité C_{eq}. En effet, l'énergie de l'association s'écrit

$$W_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_{\text{eq}}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

On peut étendre cette démonstration à un nombre quelconque de condensateurs. Ainsi, N condensateurs associés en série, sans influence mutuelle et tels que les liaisons inter-armatures soient neutres, se comportent comme un condensateur de capacité

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \quad \heartsuit \tag{7.13}$$

7.4.3 Décharge d'un condensateur

Considérons un circuit constitué d'une source réelle de f.é.m e_0, d'un condensateur de capacité C, d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un inverseur K. On commence par charger le condensateur en basculant K de manière à mettre en contact la source de tension et le condensateur. Le condensateur se trouve alors chargé et stocke ainsi la quantité de charge

$$q = Ce_0$$

À $t = 0$, on bascule K. Le condensateur se décharge alors dans la résistance : c'est le régime libre du dipôle RC. Cherchons l'évolution de la tension capacitive $u_c(t)$ ainsi que le courant de décharge $i(t)$.

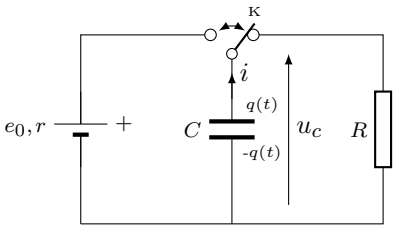


FIGURE 7.14 – Montage RC

La loi des mailles donne

$$u_c(t) - Ri(t) = 0 \quad \text{avec} \quad i(t) = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$

La tension u_c vérifie donc l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

On voit immédiatement, par l'analyse dimensionnelle de l'équation différentielle, que τ représente une durée. Les solutions sont de la forme $u_c(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$. On détermine A grâce à la condition initiale $u_c(0) = e_0$, ce qui donne $A = e_0$. Finalement, la tension u_c évolue au cours du temps suivant la loi

$$u_c(t) = e_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{e_0}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

La tension capacitive décroît exponentiellement jusqu'à s'annuler au bout d'un certain temps. Le temps caractéristique de cette décharge peut s'obtenir en prenant l'intersection de la tangente à

l'origine avec la valeur finale $u_c = 0$. Il est facile de montrer que cette intersection a lieu lorsque $t = \tau$. La durée $\tau = RC$ donne ainsi un ordre de grandeur de la durée de la décharge. **On retiendra qu'au bout de 5τ la décharge peut être considérée terminée.** On voit donc qu'une grande résistance ralentit le temps de décharge du condensateur.

Le courant de décharge, quant à lui, n'est pas constant lors de ce processus. Il est maximum à $t = 0^+$ et vaut e_0/R. Notez que le courant n'est pas une fonction continue puisqu'il subit une discontinuité entre $t = 0^-$ et $t = 0^+$. En effet, lorsque l'on bascule l'interrupteur K sur la branche contenant la résistance, on met brutalement la résistance sous tension (e_0) ce qui impose un courant initial e_0/R.

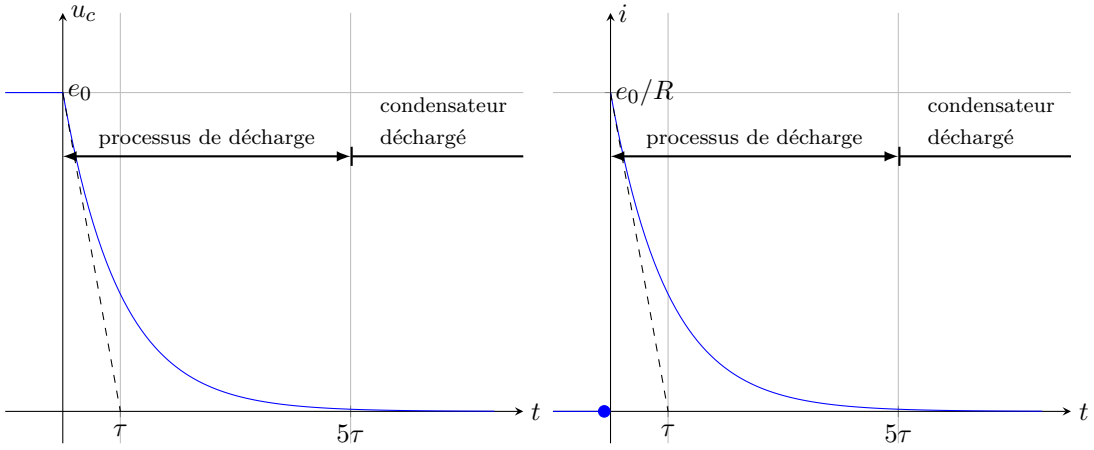


FIGURE 7.15 – Évolution de la tension capacitive et du courant de décharge.

Bilan d'énergie.

D'un point de vue énergétique, l'énergie stockée sous forme électrique $W_E = \frac{1}{2}Cu_c^2$ décroît avec un temps de relaxation $\tau_E = 2\tau$. L'énergie initialement emmagasinée par le condensateur est complètement dissipée par effet Joule. En effet, on pourra vérifier que

$$\int_0^\infty Ri^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}C{e_0}^2$$

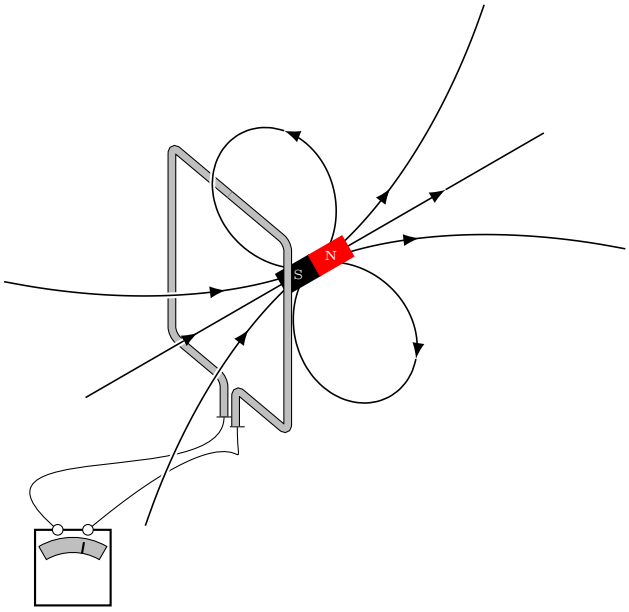
> **Remarque** : L'énergie dissipée ne dépend pas de la résistance. C'est la durée de la dissipation qui en dépend.

7.5 Phénomène d'auto-induction

7.5.1 Introduction à l'induction magnétique

Le phénomène d'induction électromagnétique, découvert par Faraday en 1831, a une grande portée industrielle puisqu'il permet de convertir une énergie mécanique en une énergie électrique et vice-versa. Décrivons le principe à l'aide de l'expérience suivante.

Expérience : Mettons en mouvement un aimant au voisinage d'un cadre conducteur reliée à un galvanomètre (détecteur de courant).



On observe l'existence d'un courant induit par le mouvement de l'aimant. Plus précisément, on constate que l'intensité du courant dépend de la façon dont on déplace l'aimant.

- Si l'on approche l'aimant de façon à ce que le champ magnétique augmente au voisinage de la spire, le courant électrique qui apparaît circule dans un sens tel qu'il produit un champ opposé au champ magnétique imposé par l'aimant.
- à l'inverse, quand l'aimant s'éloigne de façon à ce que le champ magnétique diminue, le courant électrique induit circule de façon à renforcer le champ magnétique imposé.
- le sens du courant dépend du sens de l'aimant et du mouvement mais dans tous les cas, le courant induit créé un champ magnétique qui s'oppose à la variation du champ magnétique imposé par le mouvement de l'aimant.
- Ce phénomène est amplifié par la vitesse du mouvement et par la puissance de l'aimant.

Répétons la même expérience en remplaçant l'ampèremètre par un voltmètre. Dans ce cas, on note que le mouvement de l'aimant induit également une tension d'autant plus importante que le mouvement de l'aimant est rapide. La polarité de la tension induite dépend du sens de l'orientation de l'aimant.

La première expérience montre que la spire se comporte comme un aimant dont l'action sur l'aimant consiste à le freiner dans son mouvement.

Loi de Lenz
Dans un circuit fermé, la variation de flux magnétique produit un courant induit dont les effets s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

Dans la deuxième expérience, le circuit ouvert n'est plus le siège d'un courant mais voit apparaître à ses bornes, une tension électrique. Le circuit se comporte alors comme une source de tension de f.é.m e, dite **force électromotrice induite**. Quantitativement, on montre que

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi_B}{\mathrm{d}t} \quad \heartsuit \tag{7.14}$$

Cette loi, dite **loi de Faraday**, fait intervenir le flux magnétique ϕ_B à travers le circuit. Rappelons que

$$\phi_B = \iint_S \vec{B}.\vec{n}\,\mathrm{d}S \qquad [\mathrm{Wb}]$$

Sa valeur, exprimée en weber (Wb), dépend de la forme du circuit et du champ magnétique mais en aucune manière il ne dépend du choix de la surface S s'appuyant sur le circuit. Comme d'habitude, $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire localement normal à la surface S et dont le sens est lié au sens positif du circuit *via* la règle du tire-bouchon.

7.5.2 Auto-induction

On parle d'auto-induction quand la source de champ magnétique à l'origine du phénomène d'induction dans un circuit est produit par le circuit même.

Considérons une bobine, c'est-à-dire un enroulement de fil électrique. Lorsque cette bobine est traversée par un courant électrique, celui-ci produit un champ magnétique ainsi qu'un flux magnétique ϕ_B, dit *flux propre*, à travers la bobine. Étant donné que le champ magnétique créé est proportionnel à l'intensité i du courant (d'après la loi de Biot et Savart), on peut écrire

$$\phi_B = Li$$

où L désigne le *coefficient d'auto-inductance*[3]. La grandeur L s'exprime en henry (symbole : H) en hommage à Joseph Henry[4]. Lorsque le courant varie au cours du temps, la bobine se comporte comme une source de f.é.m $e = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ en convention générateur. Ainsi, la caractéristique d'une bobine idéale s'écrit, en convention récepteur :

$$u_L = L\frac{di}{dt} \quad \text{[convention récepteur]} \quad \heartsuit \tag{7.15}$$

En régime continu, le courant étant permanent, $u_L = 0$. Autrement-dit, la bobine peut être remplacée par un fil conducteur parfait. Dans la pratique, le fil formant la bobine est résistive.

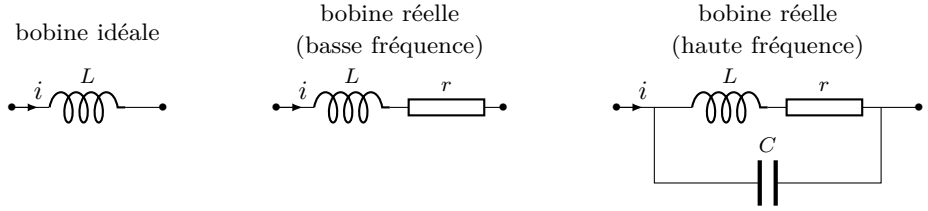


FIGURE 7.16 – Modélisations d'une bobine.

C'est pourquoi, on modélise une bobine réelle en ajoutant en série une résistance (quelques ohms). À moyenne et haute fréquence, une modélisation plus fidèle exige la présence d'un condensateur en parallèle.

7.5.3 Énergie emmagasinée dans une bobine

La puissance électrique que reçoit une bobine parcourue par un courant électrique s'écrit

$$\mathcal{P} = ui = iL\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}Li^2)$$

3. On dit aussi inductance propre

4. **Joseph Henry (1797 - 1878)** : physicien américain. En 1830, Henry découvre qu'un courant peut être induit dans un conducteur par déplacement d'un champ magnétique ; principe de l'électromagnétisme qu'il ne publiera pas. Dès 1831, il démontre la possibilité de transmettre des messages à distance en utilisant simplement une source de courant, un interrupteur et un électro-aimant. Henry présenta au public un appareil expérimental à Albany, dans l'état de New York et établit une liaison de plus de 150 mètres, démontrant ainsi la faisabilité du procédé. Mais il ne breveta pas son invention, pas plus qu'il ne lui trouva d'application pratique.. Henry sera « doublé » par M. Faraday qui découvrira seul le phénomène d'induction magnétique (août 1831) et par S. Morse qui appliquera cette découverte à la transmission d'information (1832). On lui attribue malgré tout, la découverte de l'auto-induction (juillet 1832), phénomène fondamental en électromagnétisme

Par définition, *l'énergie stockée par une bobine idéale* W_B est l'énergie qu'elle est susceptible de libérer lorsque l'on coupe son alimentation ($i = 0$).

$$W_B = -\int \mathcal{P}\,\mathrm{d}t = -\int_{i'=i}^{0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li'^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}Li^2$$

Cette énergie ne dépend pas de la façon dont on coupe l'alimentation. Ainsi, on dira qu'une bobine idéale alimentée par un courant électrique emmagasine une énergie sous forme magnétique qui vaut

$$W_B = \frac{1}{2}Li^2 \quad \heartsuit \tag{7.16}$$

7.5.4 Circuit R-L

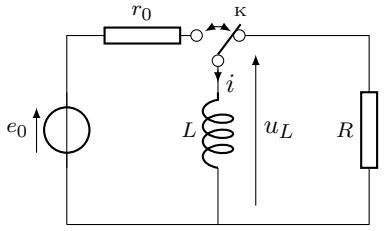


FIGURE 7.17 – Montage R-L.

Considérons un circuit constitué d'une source réelle de tension de f.é.m e_0 en série avec une résistance r_0 (si la source présente une résistance interne alors celle-ci est incluse dans r_0) qui, dans un premier temps alimente une bobine idéale. Au bout d'un certain temps, un courant permanent s'établit. Dès lors, la bobine se comportant comme un fil, on voit immédiatement que le courant s'établit à la valeur $i_0 = e_0/r_0$. À l'instant $t = 0$, on bascule un interrupteur K de sorte que la bobine se trouve en contact avec une résistance de charge R (si la bobine présente une résistance interne r, il suffit de remplacer dans les calculs qui suivent R par $R + r$.). On oriente le courant dans le sens qui correspond au sens réel du courant i_0.

Cherchons l'évolution du courant et de la tension inductive $u_L(t)$ à partir de $t = 0$.

La loi des mailles donne

$$u_L(t) + Ri(t) = 0 \quad \text{avec} \quad u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

ce qui donne, en posant $\tau = L/R$,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = 0 \qquad \text{pour } t > 0$$

Les solutions de cette équation différentielle du premier ordre sont de la forme $i = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Pour déterminer la constante d'intégration A il faut connaître la valeur de i lorsque $t \to 0^+$. Or, **la bobine impose la continuité du courant**. En effet, étant donné qu'il est impossible de fournir une puissance électrique infinie, l'énergie stockée par une bobine ne peut présenter de discontinuité. En conséquence $1/2Li^2$ varie continûment. On a donc $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = e_0/r_0$. Finalement on obtient

$$i(t) = \frac{e_0}{r_0}\mathrm{e}^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{Re_0}{r_0}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

La tension inductive est négative et croît jusqu'à s'annuler au bout d'une durée d'environ $5L/R$. Le courant décroît également jusqu'à s'annuler avec le même temps de relaxation. La mesure du temps de relaxation du dipôle RL peut permettre de mesurer la résistance interne d'une bobine réelle par exemple.

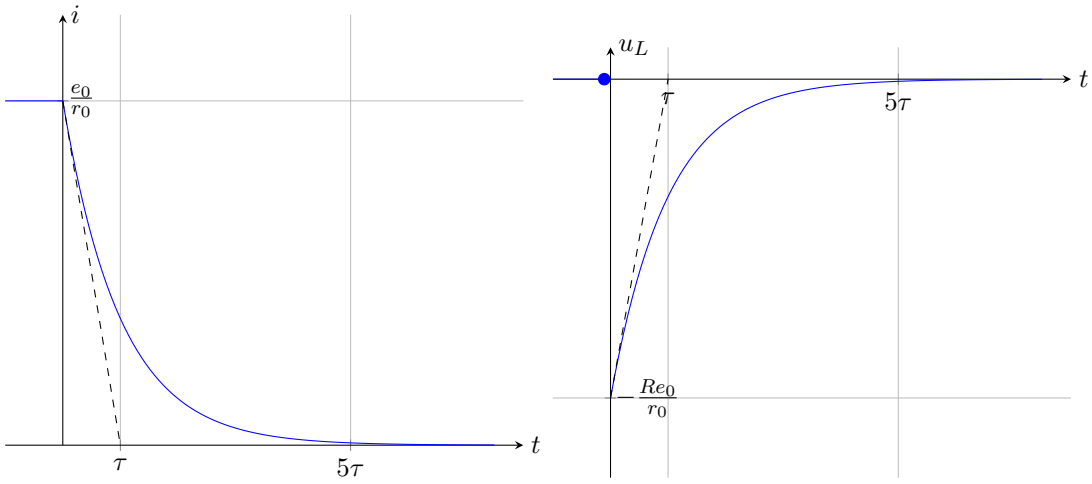


FIGURE 7.18 – Évolution de la tension inductive et du courant.

D'un point de vue énergétique, l'énergie magnétique $W_M = \frac{1}{2}Li^2$ décroît avec un temps de relaxation $\tau_E = 2\tau$. Là aussi, l'énergie stockée est complètement dissipée par effet Joule. En effet, on pourra vérifier que

$$\int_0^\infty Ri^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}Li_0^2$$

8 – RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

On étudie dans ce cours les circuits électriques linéaires en régime sinusoïdal forcé. Dans ce cas, il est intéressant d'introduire le concept d'impédance complexe. Les lois de l'électricité se transforment alors en équations algébriques simples à résoudre.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

http://femto-physique.fr/electromagnetisme/regime_sinusoidal.php

Sommaire

8.1 Signaux périodiques 91
8.1.1 Généralités sur les signaux périodiques 91
8.1.2 Le signal sinusoïdal 92
8.1.3 Représentations d'un signal sinusoïdal 93
8.1.4 Établissement du régime sinusoïdal forcé 94
8.2 Notion d'impédance et d'admittance 95
8.2.1 Définitions 95
8.2.2 Exemples 96
8.2.3 Lois d'association 97
8.2.4 Méthodes de résolution d'un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé . 97
8.3 Puissance en régime sinusoïdal forcé. 98
8.3.1 Puissance absorbée par un dipôle linéaire 98
8.3.2 Facteur de puissance 99

8.1 Signaux périodiques

8.1.1 Généralités sur les signaux périodiques

Un signal temporel $y(t)$ constitué par un motif de durée T qui se répète à l'identique, est dit périodique, et T représente **la période** du signal. Mathématiquement, le signal vérifie

$$y(t+T) = y(t) \quad \forall t$$

Il est facile de voir que si T est une période, alors $2T$ l'est également. C'est pourquoi, par convention, la période est la plus petite valeur possible de T telle $y(t+T) = y(t)$ pour tout t.

Le nombre ν de périodes dans une seconde s'appelle **la fréquence** et s'exprime en hertz (Hz), en hommage à Hertz [1] :

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}} \ \heartsuit \tag{8.1}$$

Les appareils de mesure électrique (voltmètre, ampèremètre, oscilloscope, etc.) permettent d'accéder à différentes grandeurs.

- La valeur continue représente la grandeur moyenne du signal :

$$\overline{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt$$

- La valeur crête-à-crête correspond à l'écart entre la valeur maximum et la valeur minimum :

$$y_{\text{pp}} = \max(y) - \min(y)$$

- La valeur efficace ou valeur RMS [2] représente la racine de la moyenne du carré du signal :

$$y_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{y^2}}$$

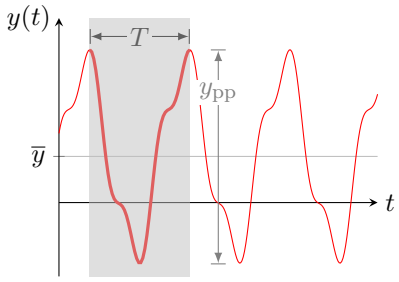


FIGURE 8.1 – Caractéristiques d'un signal périodique.

Dans la suite, on se limite aux signaux sinusoïdaux. En effet, le théorème de Fourier stipule (sous certaines conditions mathématiques peu restrictives en électricité) qu'un signal périodique de fréquence ν se décompose, en sinus et cosinus de fréquences multiples de la fréquence ν :

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi\, k\nu t) + b_k \sin(2\pi\, k\nu t)$$

1. **Heinrich Hertz (1857-1894)** : physicien théoricien, il réussit la première émission et réception d'ondes radio en 1887, sur une distance de 20 mètres donnant du même coup une preuve de la validité de la théorie électromagnétique de Maxwell. Dans les milieux scientifiques, il est considéré comme le découvreur de la radio. C'est la raison pour laquelle on a donné le nom d' « ondes hertziennes » aux signaux radio et pourquoi l'unité de la fréquence vibratoire –appelée « cycle » au départ– a été remplacée par « hertz ».

2. Acronyme anglais pour *Root Mean Square*

où a_0 représente la valeur moyenne (sa composante continue) et $a_k \cos(2\pi k\nu t) + b_k \sin(2\pi k\nu t)$ la k^{e} harmonique. Si l'on connait tous les coefficients a_k et b_k, appelés coefficients de Fourier, on peut reconstruire complètement le signal périodique. Or, puisque l'on étudie des réseaux linéaires, si l'on connaît leur comportement vis à vis d'un signal sinusoïdal quelconque, on est capable de connaître, par combinaison linéaire, la réponse vis à vis de n'importe quelle signal périodique, ce qui justifie l'étude de la réponse en régime sinusoïdal.

8.1.2 Le signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal $y(t)$ s'exprime par

$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

A désigne **l'amplitude**, ϕ **la phase** (en radian) et ω **la pulsation** (en rad/s). Le signal est bien périodique puisque l'équation

$$\cos(\omega t + \phi + \omega T) = \cos(\omega t + \phi) \quad \forall t$$

admet comme solution

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Longrightarrow \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \heartsuit \tag{8.2}$$

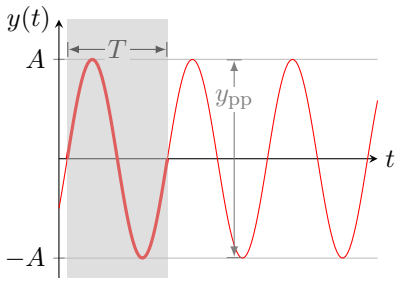


FIGURE 8.2 – Signal sinusoïdal.

Par ailleurs, on voit sur le graphe qu'un signal sinusoïdal ne présente pas de composante continue ($\overline{y} = 0$). La valeur crête-à-crête donne immédiatement l'amplitude car $y_{\text{pp}} = 2A$. Enfin, on peut calculer la valeur efficace à partir de la définition. Pour tout signal sinusoïdal on trouve

$$y_{\text{rms}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad \heartsuit \tag{8.3}$$

Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

La phase est une grandeur qui dépend du choix de l'origine des temps ; autrement dit, la phase est arbitraire. En revanche, **le déphasage** entre deux signaux sinusoïdaux caractérise le décalage entre les deux courbes sinusoïdales et ne dépend pas du choix de l'origine des temps. Considérons par exemple deux signaux sinusoïdaux :

$$y_1 = A\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad y_2 = B\cos(\omega t + \phi)$$

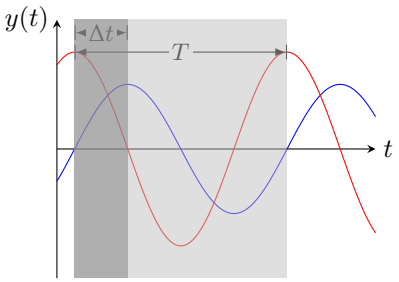


FIGURE 8.3 – Déphasage.

Les phases respectives de y_1 et y_2 sont $\phi_1 = 0$ et $\phi_2 = \phi$. Le déphasage de y_2 par rapport à y_1 vaut $\phi_2 - \phi_1 = \phi$. Si $\phi > 0$ on dit que y_2 est en avance sur y_1, sinon y_2 est en retard sur y_1. Pour mesurer ϕ il suffit de déterminer le décalage entre deux sommets par exemple. En effet, d'après l'expression de y_1 on voit que le signal atteint son maximum en $t = 0$, alors que y_2 atteint son maximum en $t = -\frac{\phi}{\omega}$. Ainsi si $\phi > 0$, le signal y_2 est décalé vers la gauche et atteint son maximum avant le signal y_1 : il est donc en avance. La relation entre le déphasage et le décalage temporel est donné par

$$\phi = \frac{2\pi}{T} \times \Delta t$$

Visualisation en mode XY

Lorsque l'on injecte un signal sinusoïdal sur la voie X d'un oscilloscope et un autre sur la voie Y, puis que l'on commute l'oscilloscope en mode XY, on obtient une courbe paramétrique d'équation

$$\begin{cases} X(t) &= a\cos(\omega t) \\ Y(t) &= b\cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Il s'agit de l'équation paramétrique d'une ellipse circonscrite dans un rectangle $2a \times 2b$ et dont l'excentricité e varie avec ϕ (*cf.* Figure 8.4). Cette représentation permet de repérer aisément la situation où les deux signaux sont en phase ($\phi = 0$) ou en opposition de phase ($\phi = \pi$).

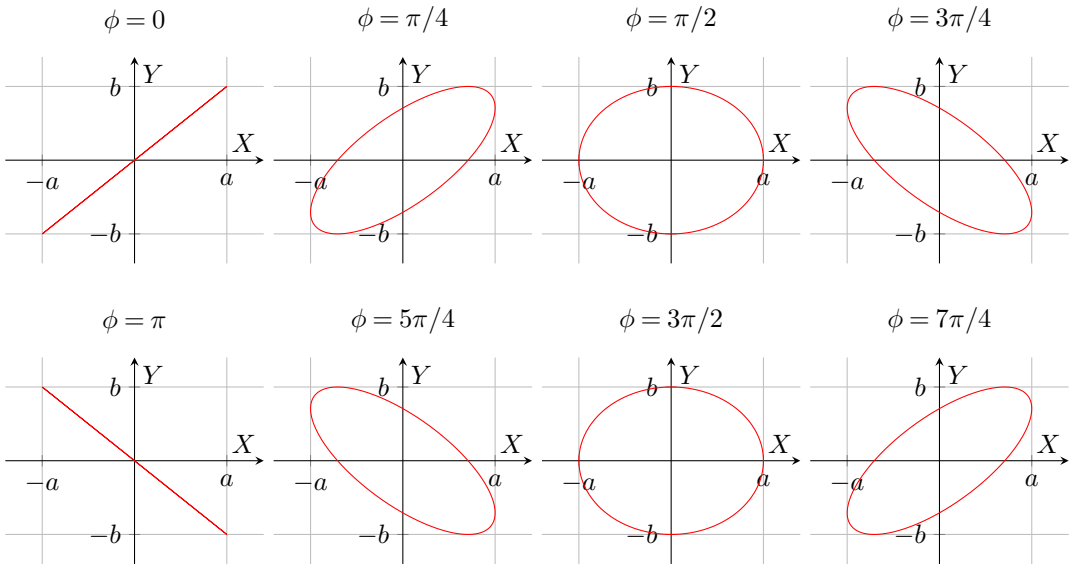


FIGURE 8.4 – Deux signaux sinusoïdaux déphasés de ϕ en mode XY.

Exercice
Un générateur délivre une tension sinusoïdale $u_1(t)$ de fréquence 100 Hz de valeur efficace 5,0 V. Un autre générateur délivre une tension sinusoïdale de même fréquence, de tension crête-à-crête 4,8 V et en avance de 90° sur $u_1(t)$. En considérant que la phase à l'origine de $u_1(t)$ est nulle, donner les expressions mathématiques des deux tensions.

La pulsation des deux signaux vaut $\omega = 200\,\pi\,\text{rad.s}^{-1}$. L'amplitude de la première tension s'obtient à partir de la valeur efficace : $A_1 = \sqrt{2} \times 5{,}0 = 7{,}1$. Pour le deuxième signal, la phase vaut $\pi/2$ rad et l'amplitude $4{,}8/2 = 2{,}4$ V. Finalement, on a :

$$u_1(t) = 7{,}1\cos(200\pi\,t) \quad \text{et} \quad u_2(t) = 2{,}4\cos(200\pi\,t + \pi/2)$$

8.1.3 Représentations d'un signal sinusoïdal

Représentation de Fresnel

Considérons un signal sinusoïdal $y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. On peut représenter cette grandeur sous la forme d'un vecteur dit *phaseur* ou *vecteur de Fresnel*. Il s'agit d'un vecteur faisant un angle $\omega t + \phi$ avec l'axe des abscisses et une longueur A. L'intérêt de cette représentation réside dans le fait que la somme de deux signaux sinusoïdaux s'obtient en sommant vectoriellement les vecteurs de Fresnel. Le déphasage entre deux signaux correspond alors à l'angle entre les vecteurs de Fresnel.

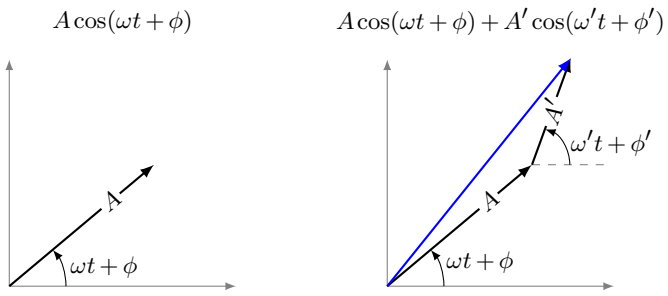


FIGURE 8.5 – Représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal et d'une somme de deux signaux sinusoïdaux.

Représentation complexe

Il existe une autre représentation très utile : on peut considérer que $y(t)$ est la partie réelle d'un nombre complexe :

$$y(t) = \mathrm{Re}(\underline{y}(t)) \quad \text{avec} \quad \underline{y}(t) = A\,\mathrm{e}^{j(\omega t+\phi)}$$

avec, en électricité, le nombre complexe j tel que $j^2 = -1$ (La notation classique i est évitée pour ne pas générer de confusion avec l'intensité du courant électrique.). On dira alors que $\underline{y}(t)$ est le **nombre complexe associé au signal sinusoïdal**. On peut l'écrire sous la forme

$$\underline{y}(t) = \underline{A}\,\mathrm{e}^{j(\omega t)} \quad \text{avec} \quad \underline{A} = A\,\mathrm{e}^{j\phi} \quad \heartsuit \tag{8.4}$$

Le nombre complexe $\underline{A}$ est appelé **amplitude complexe**. Lorsque l'on connaît l'amplitude complexe d'un signal on peut en déduire l'amplitude du signal réel ainsi que la phase *via* les relations

$$A = |\underline{A}| \quad \text{et} \quad \phi = \arg(\underline{A})$$

Pour deux signaux sinusoïdaux y_1 et y_2 d'amplitude complexe $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$, le **déphasage de y_2 par rapport à** y_1 vaut :

$$\phi = \arg(\underline{A}_2) - \arg(\underline{A}_1) = \arg\left(\frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1}\right)$$

L'intérêt de la notation complexe réside dans la simplification des calculs différentiels. Par exemple dériver un sinus revient à multiplier par $j\omega$ le nombre complexe :

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \to j\omega\underline{y}$$

8.1.4 Établissement du régime sinusoïdal forcé

Pour illustrer ce que représente le régime sinusoïdal forcé, prenons l'exemple d'un circuit RLC série alimenté par un générateur basse fréquence (GBF) délivrant une tension sinusoïdale de pulsation ω. Ce signal d'excitation s'écrit

$$e(t) = E\cos\omega t$$

Observons l'évolution du signal d'excitation sur la voie 1 d'un oscilloscope (`CH1`) et la tension capacitive sur la voie 2 (`CH2`).

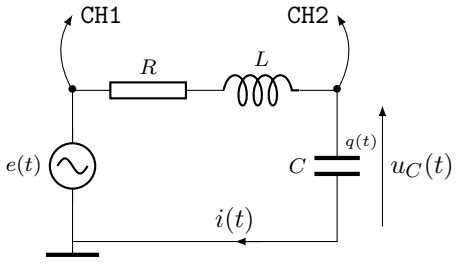


FIGURE 8.6 – Montage RLC.

La loi des mailles donne

$$e(t) - Ri(t) - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - u_C(t) = 0 \quad \text{avec} \quad i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

ce qui donne, après avoir posé $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u_C = {\omega_0}^2 E\cos(\omega t) \quad \text{pour} \quad t > 0$$

Du point de vue mathématique, la solution se compose de deux termes.

- Le premier terme correspond à la solution de l'équation homogène et représente le régime libre d'un oscillateur. Ce régime est transitoire puisqu'il se dissipe au bout d'un certain temps.
- Le second est une solution particulière de la forme $A\cos(\omega t + \phi)$. Il représente le *régime sinusoïdal forcé*. Ce régime ne se dissipe pas contrairement au régime transitoire ; il est entretenu par la source.

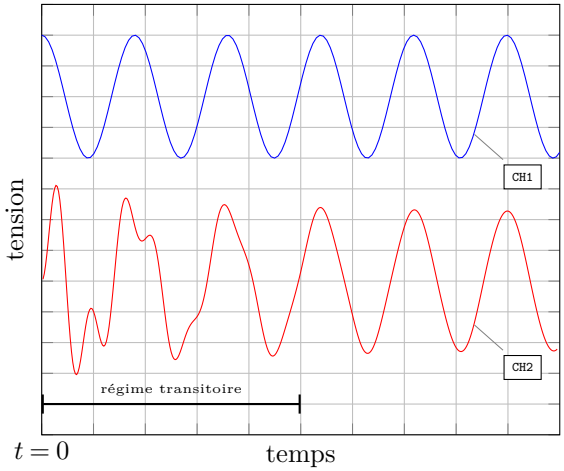


FIGURE 8.7 – Établissement du régime sinusoïdal (paramètres : $\omega = 0{,}35\,\omega_0$ et $Q = 10$).

La figure-8.7 montre l'établissement du régime forcé, c'est-à-dire la disparition du régime transitoire au détriment d'un régime sinusoïdal permanent de même fréquence que l'excitation. On note la présence du régime transitoire par l'apparition d'interférences entre deux signaux non synchrones (de fréquences différentes). En effet, avec un grand facteur de qualité, le régime transitoire fait apparaître des oscillations faiblement amorties de fréquence voisine de la fréquence propre qui se superpose au régime sinusoïdal forcé.

Régime sinusoïdal forcé
Lorsque le régime transitoire s'est dissipé, toutes les grandeurs électriques oscillent de façon sinusoïdale à la même fréquence que l'excitateur (fréquence imposée par le G.B.F.). On s'interesse aux propriétés électriques des circuits une fois ce régime sinusoïdal installé.

8.2 Notion d'impédance et d'admittance

8.2.1 Définitions

Supposons un réseau linéaire constitué de sources sinusoïdales de même fréquence ν. Une fois le régime transitoire dissipée, un régime sinusoïdal de fréquence ν s'installe dans toutes les branches du réseau.

On adopte la représentation complexe : notons $\underline{\mathrm{U}}$ l'amplitude complexe associée à la tension et $\underline{\mathrm{I}}$ l'amplitude complexe associée à l'intensité. Par définition, *l'impédance* d'un dipôle passif linéaire s'écrit

$$\underline{Z} \equiv \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX \quad \heartsuit \tag{8.5}$$

où R désigne la résistance et X la réactance. Z se mesure en ohm (Ω). Notez que la notion d'impédance n'a de sens que pour un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdal. On définit également l'*admittance* du dipôle, qui vaut

$$\underline{Y} \equiv \frac{1}{\underline{\mathrm{Z}}} = G + jS$$

où G désigne la conductance et S la susceptance. Y se mesure en siemens (S ou Ω^{-1}).

On peut déterminer l'impédance d'un dipôle passif linéaire en le soumettant à une tension sinusoïdale puis en effectuant les mesures de la tension efficace, de l'intensité efficace ainsi que du déphasage entre le courant et la tension électrique. En effet, d'après la définition de l'impédance, on a

$$|\underline{Z}| = \frac{U_{\mathrm{rms}}}{I_{\mathrm{rms}}} \quad \text{et} \quad \arg(\overline{Z}) = \phi_u - \phi_i \quad \heartsuit \tag{8.6}$$

8.2.2 Exemples

On retiendra les impédances des trois dipôles passifs linéaires suivants :

Conducteur ohmique	**Bobine**	**Condensateur**
$u(t) = Ri(t)$	$u(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$	$i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$
$\underline{u} = R\underline{i}$	$\underline{u} = jL\omega\,\underline{i}$	$\underline{i} = jC\omega\,\underline{u}$
$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_c = \dfrac{1}{jC\omega}$

On remarque que le conducteur ohmique n'introduit pas de déphasage entre la tension et le courant puisque l'impédance d'une résistance est réelle et se confond avec sa résistance. En revanche la bobine et le condensateur introduisent un déphasage de $\pi/2$: on dit que courant et tension évoluent en *quadrature de phase*. Dans le cas de la bobine idéale, c'est la tension inductive qui est en avance de $\pi/2$ par rapport au courant alors qu'aux bornes d'un condensateur idéal, la tension capacitive est en retard de $\pi/2$.

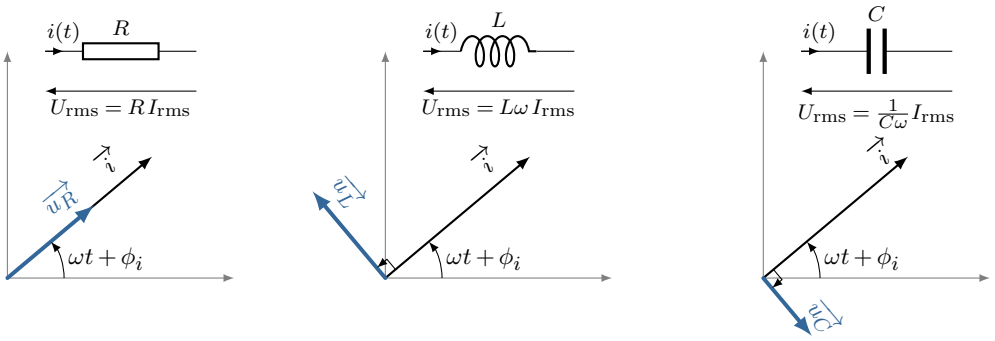


FIGURE 8.8 – Impédances : représentations de Fresnel.

8.2.3 Lois d'association

En régime sinusoïdal forcé, à chaque grandeur électrique (courant, tension) correspond une grandeur complexe associée. L'écriture de la loi des mailles et celle des nœuds aboutit à des équations algébriques dans $\mathbb{C}$. En conséquence, les formules d'association des résistances s'étendent aux impédances complexes :

$$\text{en série,} \quad \underline{Z_{\text{eq}}} = \sum_i \underline{Z_i} \quad \text{et en parallèle,} \quad \underline{Y_{\text{eq}}} = \sum_i \underline{Y_i} \quad \heartsuit \tag{8.7}$$

Exemple : la bobine réelle
On alimente une bobine réelle à l'aide d'une source de tension sinusoïdale $u(t) = E\cos(\omega t)$. Cherchons comment s'exprime l'intensité du courant électrique en régime forcé. On note r la résistance interne de la bobine et L sa self-inductance.
Tout d'abord, la bobine réelle se modélise par une résistance r en série avec une bobine idéale de self inductance L. Son impédance s'écrit donc

$$\underline{Z} = r + jL\omega$$

La définition de l'impédance permet d'obtenir l'intensité du courant en notation complexe :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} = \frac{E\,\mathrm{e}^{j\omega t}}{r + jL\omega}$$

soit

$$\underline{i} = \frac{E}{r^2 + (L\omega)^2}(r - jL\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}$$

On obtient l'intensité en prenant la partie réelle de $\underline{i}$. Sachant que $j = \mathrm{e}^{j\pi/2}$, on a

$$i(t) = \frac{E}{r^2 + (L\omega)^2}\left[r\cos(\omega t) + L\omega\sin(\omega t)\right]$$

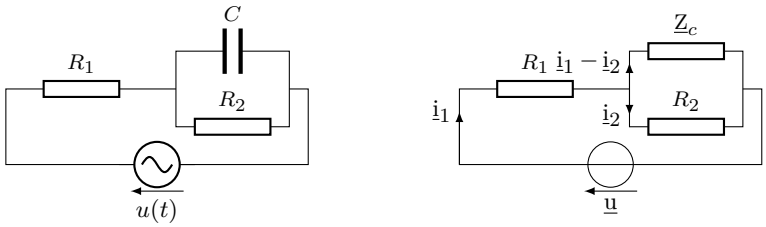
8.2.4 Méthodes de résolution d'un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé

Dans un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs sont sinusoïdales. On peut remplacer chaque dipôle passif par son impédance et les sources par les grandeurs complexes associées. Les équations de Kirchhoff (loi des noeuds + loi des mailles) exprimées à l'aide des grandeurs complexes associées, donnent alors des équations algébriques :

$$\sum_k \epsilon_k \underline{u_k} = 0 \quad \text{loi des mailles} \qquad \text{et} \qquad \sum_k \epsilon_k \underline{i_k} = 0 \quad \text{loi des nœuds}$$

Les problèmes sont donc identiques à ceux rencontrés en régime continu, à ceci près que les grandeurs recherchées sont des nombres complexes, caractérisées par une amplitude (le module) et une phase (l'argument).

Exemple : Considérons le circuit ci-dessous alimenté par un générateur basse fréquence réglé sur 50 Hz. La valeur efficace de la tension $u(t)$ appliquée vaut 1000 V. Cherchons les valeurs efficaces des courants électriques dans chaque branche sachant que $R_1 = 40\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 320\,\text{k}\Omega$ et $C = 25\,\text{nF}$.



En parcourant toutes les branches et en appliquant systématiquement loi des nœuds, on s'aperçoit qu'il y a deux inconnues en courant : $\underline{\text{i}}_1$ et $\underline{\text{i}}_2$. Il suffit d'écrire deux lois des mailles, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcl} R_1\underline{\text{i}}_1 + R_2\underline{\text{i}}_2 & = & \underline{\text{u}} \\ \underline{\text{Z}}_c(\underline{\text{i}}_1 - \underline{\text{i}}_2) - R_2\underline{\text{i}}_2 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \underline{\text{i}}_1 & = & \dfrac{\underline{\text{Z}}_c + R_2}{\underline{\text{Z}}_c(R_1+R_2)+R_1R_2}\underline{\text{u}} \\ \underline{\text{i}}_2 & = & \dfrac{\underline{\text{Z}}_c}{\underline{\text{Z}}_c(R_1+R_2)+R_1R_2}\underline{\text{u}} \end{array}\right.$$

Sachant que $\underline{\text{Z}}_c = 1/jC\omega$, on trouve

$$\underline{\text{i}}_1 = \frac{1 + jR_2C\omega}{(R_1+R_2)+jR_1R_2C\omega}\underline{\text{u}} \quad \text{et} \quad \underline{\text{i}}_2 = \frac{1}{(R_1+R_2)+jR_1R_2C\omega}\underline{\text{u}}$$

On obtient les amplitudes en prenant les modules de ces nombres complexes. En divisant par $\sqrt{2}$ on trouve les valeurs efficaces. On obtient

$$I_{1\,\text{rms}} = \sqrt{\frac{1+(R_2C\omega)^2}{(R_1+R_2)^2+(R_1R_2C\omega)^2}}U_{\text{rms}} = 7{,}2\,\text{mA}$$

et

$$I_{2\,\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(R_1R_2C\omega)^2}}U_{\text{rms}} = 2{,}7\,\text{mA}$$

Pour le courant i_c qui traverse le condensateur, on a

$$\underline{\text{i}}_c = \underline{\text{i}}_1 - \underline{\text{i}}_2 - = \frac{jR_2C\omega}{(R_1+R_2)+jR_1R_2C\omega}\underline{\text{u}}$$

D'où l'on tire

$$I_{c\,\text{rms}} = \frac{R_2C\omega}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(R_1R_2C\omega)^2}}U_{\text{rms}} = 6{,}7\,\text{mA}$$

8.3 Puissance en régime sinusoïdal forcé.

8.3.1 Puissance absorbée par un dipôle linéaire

Alimentons un dipôle linéaire passif par une tension sinusoïdale $u(t)$. En régime sinusoïdal forcé, le courant d'alimentation d'intensité $i(t)$ est également sinusoïdal. Écrivons

$$u(t) = \sqrt{2}\,U_{\text{rms}}\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad i(t) = \sqrt{2}\,I_{\text{rms}}\cos(\omega t - \phi)$$

avec ϕ **le déphasage de la tension par rapport au courant**. Exprimons la puissance $\mathcal{P}$ reçue par le dipôle. À partir de l'identité $\cos a\cos b = 1/2[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$, on obtient

$$\mathcal{P}(t) = u(t)\,i(t) = U_{\text{rms}}I_{\text{rms}}[\cos\phi + \cos(2\omega t - \phi)]$$

La puissance instantanée oscille à la pulsation 2ω autour de $U_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\cos\phi$. Ce terme représente la puissance moyenne injectée dans le dipôle, ou *puissance active*.

Par définition, la **puissance active** est la puissance électrique moyenne reçue par le dipôle :

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t = U_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}} \cos\phi$$

Exercice
L'emballage d'une ampoule « basse consommation » indique : 230 V – 150 mA – 20 W – 50 Hz. En déduire l'expression de son impédance complexe.

Les indications signifient que lorsque l'ampoule est alimentée par une tension sinusoïdale de 50 Hz et de tension efficace 230 V, elle consomme une puissance moyenne de 20 W et est traversée par un courant alternatif de valeur efficace 150 mA. De ces informations on peut déduire l'impédance (en module)

$$|Z| = \frac{U_{\mathrm{rms}}}{I_{\mathrm{rms}}} = 1533\,\Omega$$

ainsi que le déphasage tension/courant :

$$\cos\phi = \frac{\mathcal{P}}{U_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}}} = 0,58 \quad \text{soit} \quad \phi = \pm 55°$$

Comme une ampoule possède plutôt un caractère inductif, il faut choisir la valeur positive. Ainsi,

$$\underline{Z} = |Z|(\cos\phi + j\sin\phi) = (889 + j1249)\,\Omega$$

La puissance active permet d'obtenir l'énergie fournie à un dipôle pendant la durée Δt. En effet, si la durée Δt est grande devant la période T du signal électrique, on a

$$\mathcal{E} = \int_{t=0}^{\Delta t} \mathcal{P}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{\Delta t}\int_{t=0}^{\Delta t} \mathcal{P}\,\mathrm{d}t\right)\Delta t \simeq \overline{\mathcal{P}} \times \Delta t$$

En conséquence, l'énergie se conservant, si un circuit alimenté par une source alternative possède N dipôles passifs consommant chacun une puissance active $\overline{\mathcal{P}_i}$, alors la puissance moyenne délivrée par la source vaut

$$\overline{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{N} \overline{\mathcal{P}_i} \quad \heartsuit \tag{8.8}$$

8.3.2 Facteur de puissance

Par définition le facteur de puissance d'un dipôle passif est le rapport de la puissance active reçue $\overline{P}$ sur la puissance apparente $U_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}}$ (en V.A). En régime sinusoïdal,

$$\text{Facteur de puissance} = \frac{\mathcal{P}}{U_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}}} = \cos\phi \quad \heartsuit \tag{8.9}$$

Rappelons que le déphasage s'obtient à partir de l'impédance complexe du dipôle :

$$\phi = \arg(\underline{Z})$$

Ainsi, pour un dipôle dont l'impédance est réelle[3] ($\underline{Z} = R$), on a $\phi = 0$ soit un facteur de puissance égal à 1. Dans ce cas, le dipôle absorbe une puissance moyenne

$$\underline{\mathcal{P}} = U_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}} = R {I_{\mathrm{rms}}}^2$$

3. C'est le cas d'un conducteur ohmique mais ce n'est pas le seul cas.

On peut d'ailleurs donner un nouveau sens physique à l'intensité efficace : cela correspond à l'intensité du courant continu qui produirait la même dissipation d'énergie dans une résistance.

Pour un dipôle purement inductif ou capacitif (on dit réactif), l'impédance complexe est un nombre imaginaire pur d'où $\phi = \pm\pi/2$. Par conséquent $\overline{\mathcal{P}} = 0$: le dipôle n'absorbe pas de puissance électrique en moyenne [4].

Dans le cas d'un dipôle passif linéaire quelconque, c'est-à-dire présentant une impédance avec une partie réelle non nulle, on a

$$\underline{Z} = R + jX \quad \Longrightarrow \quad \cos\phi = \frac{R}{|Z|}$$

La puissance active s'écrit

$$\overline{\mathcal{P}} = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \frac{R}{|Z|} = R {I_{\text{rms}}}^2$$

Finalement, en régime sinusoïdal tout dipôle passif linéaire reçoit une puissance moyenne

$$\boxed{\overline{\mathcal{P}} = R {I_{\text{rms}}}^2 \quad \text{où} \quad R = \text{Re}(\underline{Z})} \ \heartsuit \tag{8.10}$$

Importance du facteur de puissance

Le distributeur d'électricité facture généralement la puissance électrique moyenne consommée par l'installation concernée. En revanche, la puissance gaspillée par effet joule dans les lignes de transport est facturée globalement. C'est pourquoi les distributeurs d'électricité appliquent une surfacturation lorsque le facteur de puissance d'une installation est trop faible.

En effet, une installation industrielle présente en général un caractère inductif important dû à la présence des moteurs (bobinages) d'où un $\cos\phi$ qui peut être faible. Si l'installation consomme une puissance active $\overline{\mathcal{P}}$, alors le courant d'alimentation a pour valeur efficace

$$I_{\text{rms}} = \frac{\overline{\mathcal{P}}}{U_{\text{rms}} \cos\phi}$$

À cette intensité correspond une puissance dissipée par effet joule dans la ligne de transport qui vaut

$$P_{\text{ligne}} = R {I_{\text{rms}}}^2 = \frac{R \overline{\mathcal{P}}^2}{{U_{\text{rms}}}^2 \cos^2\phi}$$

où R représente la résistance des lignes électriques. Ainsi, une faible valeur du facteur de puissance entraîne une perte d'énergie électrique en ligne plus importante ce qui explique pourquoi le distributeur d'électricité facture le coût d'électricité d'autant plus cher que le facteur de puissance est faible.

Si l'on veut éviter cette surfacturation il faut alors procéder à un *relevage du facteur de puissance*. En général, adjoindre un condensateur en parallèle de l'installation permet de remonter la valeur du $\cos\phi$.

4. Bien entendu, le dipôle reçoit de l'énergie ou en donne mais comme il passe autant de temps à recevoir de l'énergie qu'à en délivrer, en moyenne, le bilan est nul.

POUR EN SAVOIR PLUS ...

Ouvrages

Jackson, John David, Christian Jeanmougin et Jean-Pol Vigneron. *Electrodynamique classique : cours et exercices d'électromagnétisme*. Dunod, 2001.

Lequeux, James. *François Arago, un savant généreux*. EDP sciences, 2012.

Autres sources

Bertrand Wolff, Christine Blondel et. *A la recherche d'une loi newtonienne pour l'électrodynamique (1820-1826)*. 2009. url : http://www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique/zoom/courant/formule/index.php.

– *La force d'Ampère, une formule obsolète ?* 2009. url : http://www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique/zoom/courant/force/index.php.

Bruyn Ouboter, R. de. "Kamerlingh Onnes découvre la supraconduction". In : *Pour la science* 235 (1997).

Williams, P. "André Marie Ampère". In : *Pour la Science* 137 (1989).